Einführung in die Technische Informatik

Prof. Jian-Jia Chen | Dr.-Ing. Christian Hakert | Dr. rer. nat. Marcus Völker

RWTH Aachen University

Kapitel 2: Darstellung Boolescher Funktionen

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Abschnitt 2.1

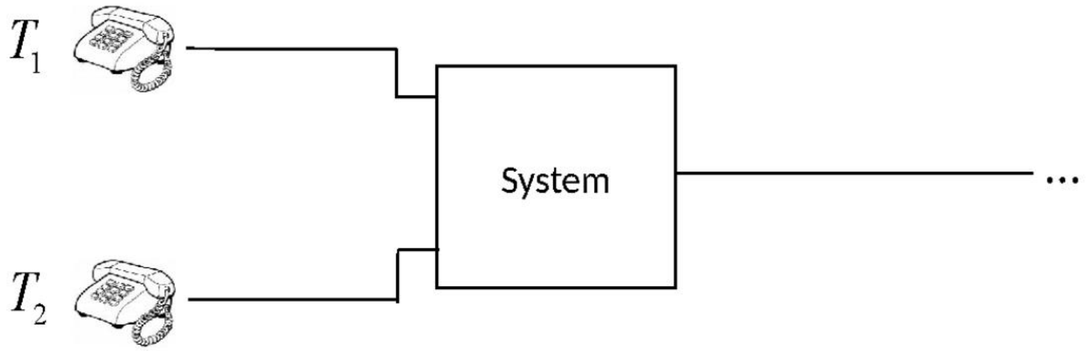
Boolesche Algebra

- Gesetze einer Booleschen Algebra
- Anwendung einer Booleschen Algebra

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Motivation

- 2 Zustände reichen aus, um Informationen zu speichern
- Beispiel:



- Aufgabe des Systems:
  - „Da nur eine Leitung genutzt wird, darf nur eines der beiden Telefone zu einem Zeitpunkt verwendet werden.“
- Formal ausgedrückt:

Boolesche Algebra

- **Boolesche Algebra** als formale Grundlage in der Schaltungstechnik und der Computerhardware
- In der Booleschen Algebra gibt es genau 2 Werte: 0 (false) und 1 (true)
- Unäre Verknüpfung: $\neg$
- Binäre Verknüpfungen: $\vee$, $\wedge$

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel: XOR, XNOR und NAND

Weitere Verknüpfungen, zusammengesetzt aus $\neg$, $\vee$, $\wedge$:

- **XOR:** $x \oplus y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
- **XNOR:** $\overline{x \oplus y} = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
- **NAND:** $x \uparrow y = \overline{x \wedge y} = \neg x \vee \neg y$

x	y	$x \oplus y$	$\overline{x \oplus y}$	$x \uparrow y$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0

Gesetze in der Booleschen Algebra

- **(a) Kommutativgesetze:**
  $x \wedge y = y \wedge x$ $\quad$ $x \vee y = y \vee x$
- **(b) Assoziativgesetze:**
  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ $\quad$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- **(c) Distributivgesetze:**
  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $\quad$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- **(d) Absorption:**
  $x \wedge (x \vee y) = x$ $\quad$ $x \vee (x \wedge y) = x$
- **(e) Idempotenz:**
  $x \wedge x = x$ $\quad$ $x \vee x = x$
- **(f) Nullelement / Einselement:**
  $x \wedge 0 = 0$ $\quad$ $x \vee 1 = 1$

Gesetze in der Booleschen Algebra

- **(g) Eindeutiges Komplement:**
  $(x \vee y = 1 \text{ und } x \wedge y = 0) \Leftrightarrow (x = \neg y)$
- **(h) Involution:**
  $\neg(\neg x) = x$
- **(i) Konstanten:**
  $\neg 0 = 1 \qquad \neg 1 = 0$
- **(j) De Morgansche Regeln:**
  $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \qquad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

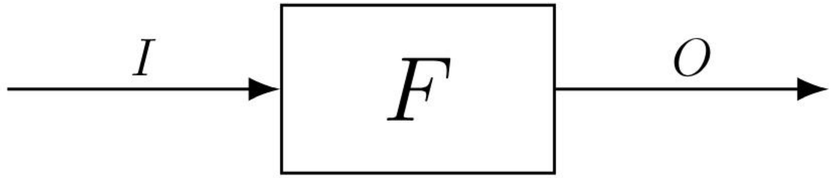
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Abschnitt 2.2

Boolesche Funktionen

- Schaltfunktionen
- 1-stellige Boolesche Funktionen
- 2-stellige Boolesche Funktionen
- Darstellung Boolescher Funktionen

Schaltfunktionen



- **Definition:** Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$. Dann heißt eine Funktion $F : B^n \to B^m$ **Schaltfunktion**.
- **Beispiele:**
  - Addition von zwei 16-stelligen Dualzahlen
  - Multiplikation von zwei 16-stelligen Dualzahlen
  - Sortieren von 30 16-stelligen Dualzahlen
  - Primzahltest einer 16-stelligen Dualzahl

Boolesche Funktionen

Eine Schaltfunktion $f : B^n \to B^1$ heißt (n-stellige) **Boolesche Funktion**.

Zusammenhang zu Schaltfunktionen:

Sei $F : B^n \to B^m$ mit $F(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = (y_{m-1}, \dots, y_1, y_0)$.
Setzt man für jedes $i \in \{m-1, \dots, 0\}$

$$f_i : B^n \to B \quad \text{definiert durch} \quad f_i(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = y_i,$$

so ist F wie folgt darstellbar:

$$F(x_{n-1}, \dots, x_0) = \Big(f_{m-1}(x_{n-1}, \dots, x_0),\ f_{m-2}(x_{n-1}, \dots, x_0),\ \dots,\ f_0(x_{n-1}, \dots, x_0)\Big)$$

für alle $x_{n-1}, \dots, x_0 \in B$.

Beispiel für Zusammenhang Schaltfunktion – Boolesche Funktion

- Schaltfunktion $F : B^2 \to B^2$: Addition zweier 1-Bit-Zahlen (Halbaddierer)
- $F(x_1, x_0) = (y_1, y_0)$ mit Übertrag y_1 und Summenbit y_0
- Zerlegung in zwei Boolesche Funktionen $f_1, f_0 : B^2 \to B$:
  - $f_1(x_1, x_0) = x_1 x_0$ (AND)
  - $f_0(x_1, x_0) = x_1 \oplus x_0$ (XOR)
- Damit: $F(x_1, x_0) = \Big(f_1(x_1, x_0),\ f_0(x_1, x_0)\Big)$

x_1	x_0	y_1	y_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1-stellige Boolesche Funktion

- Alle Funktionen $f : B \to B$:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- Es gilt: $f_0(x) = 0, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \overline{x}, \quad f_3(x) = 1$

2-stellige Boolesche Funktion

- Alle Funktionen $f : B^2 \to B$ (Teil 1):

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
(1)		$x \wedge \overline{x}$	$x \wedge y$	$x \wedge \overline{y}$	x	$\overline{x} \wedge y$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$
(2)		$\equiv 0$	Min	$>$	x	$<$	y	$\neq$	Max
(3)			$\wedge$	$\not\leftarrow$	x	$\not\rightarrow$	y	$\not\leftrightarrow$	$\vee$
(4)			AND					XOR	OR

- Legende: (1) Boolescher Ausdruck, (2) arithmetische Deutung, (3) logischer Operator, (4) Gatter
- Sind das alle 2-stelligen Booleschen Funktionen?

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2-stellige Boolesche Funktion

- Alle Funktionen $f : B^2 \to B$ (Teil 2):

x	y	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
(1)		$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \oplus y}$	$\overline{y}$	$x \vee \overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$\overline{x \wedge y}$	$x \vee \overline{x}$
(2)		1-Max	$=$	1-y	$\geq$	1-x	$\leq$	1-Min	$\equiv 1$
(3)		$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg y$	$\leftarrow$	$\neg x$	$\rightarrow$	$\uparrow$	
(4)		NOR	XNOR					NAND	

- Legende: (1) Boolescher Ausdruck, (2) arithmetische Deutung, (3) logischer Operator, (4) Gatter

Beispiel für eine 3-stellige Funktion

i	x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

- **Einschlägige Indizes:** die Zeilen mit $f = 1$, hier $i \in \{3, 5, 7\}$
- Wie viele 3-stellige Boolesche Funktionen gibt es?
- Müssen wir die alle in Funktionstabellen definieren, bevor wir sie benutzen können?

Darstellung Boolescher Funktionen

Folgende Darstellungen werden vorgestellt:

- Disjunktive und Konjunktive Normalform (DNF, KNF)
- Directed Acyclic Graph (DAG)
- Ordered Binary Decision Diagram (OBDD)
- Karnaugh-Diagramme

Abschnitt 2.3

Disjunktive und Konjunktive Normalform

- Minterme
- Darstellungssatz für Boolesche Funktionen
- Folgerung aus dem Darstellungssatz
- Maxterme
- Grundbausteine zur Realisierung Boolescher Funktionen

Minterme

Gegeben: B^3 in dieser Darstellung.

Minterm: eine Anzahl von Literalen (booleschen Variablen wie z.B. x_2), die alle durch ein **UND** ($\wedge$) verknüpft sind.

Beispiele für **Minterme:**

$$m_3(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} x_1 x_0$$
$$m_4(x_2, x_1, x_0) = x_2 \overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

i	x_2	x_1	x_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Darstellungssatz für Boolesche Funktionen

Jede Boolesche Funktion $f : B^n \to B$ ist eindeutig darstellbar als **Summe der Minterme ihrer einschlägigen Indizes**.
D.h.: Ist $I \subseteq \{0, \dots, 2^n - 1\}$ die Menge der einschlägigen Indizes von f, so gilt

$$f = \bigvee_{i \in I} m_i$$

und keine andere Minterm-Summe stellt f dar.
Die Summe der Minterme der einschlägigen Indizes wird als **Disjunktive Normalform (DNF)** bezeichnet.

Quiz: Minterme

Gegeben seien die beiden Minterme $m_3 = \overline{x_2} x_1 x_0$ und $m_4 = x_2 \overline{x_1}\,\overline{x_0}$. Ist $f(x_2, x_1, x_0) = m_3 \vee m_4 = \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_2 \overline{x_1}\,\overline{x_0}$ wieder ein Minterm?

A: ☐ Ja

B: ☐ Nein

C: ☐ Ja, nach geschickter Vereinfachung

DNF Beispiel

Sei $f : B^3 \to B$ gegeben durch die Tabelle.

DNF:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= m_3 \vee m_5 \vee m_7 \\ &= \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_2 \overline{x_1} x_0 \vee x_2 x_1 x_0 \end{aligned}$$

i	x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Folgerung aus dem Darstellungssatz

- Alle n-stelligen Booleschen Funktionen lassen sich mit den 2-stelligen Funktionen UND und ODER und der 1-stelligen Funktion NICHT darstellen.
- Man sagt:
  Das System $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ist **funktional vollständig**.

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Maxterme

Gegeben: B^3 in dieser Darstellung.

Maxterm: eine Anzahl von Literalen (booleschen Variablen wie z.B. x_2), die alle durch ein **ODER** ($\vee$) verknüpft sind.

Beispiele für **Maxterme:**

$$M_3(x_2, x_1, x_0) = x_2 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_0}$$
$$M_4(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0$$

i	x_2	x_1	x_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Konjunktive Normalform (KNF)

- Analog zu DNF: jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als das Produkt der Maxterme ihrer NICHT-einschlägigen Indizes.
- Es gilt:
  - Sei m_i i-ter Minterm von f
  - Dann heißt $M_i = \overline{m_i}$ i-ter Maxterm von f

KNF Beispiel

Sei $f : B^3 \to B$ gegeben durch die Tabelle.

KNF:

$$f(x_2, x_1, x_0) = M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$$

i	x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_0}) \wedge (x_2 \vee \overline{x_1} \vee x_0)$$
$$\wedge(\overline{x_2} \vee x_1 \vee x_0) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_0)$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Abschnitt 2.4

Funktionale Vollständigkeit

- Funktionale Vollständigkeit von NAND
- Funktionale Nicht-Vollständigkeit von $\{\rightarrow, 1\}$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Funktionale Vollständigkeit von NAND

- Bekannt: $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ist funktional vollständig
- Frage: Ist $\{\uparrow\}$ funktional vollständig?
- Vorgehen: Stelle ein bekanntes fkt. vollst. System mit $\{\uparrow\}$ dar.

1. Nicht $\{\neg\}$:

   $\overline{x} = \overline{x} \vee \overline{x} = \overline{\overline{x} \vee \overline{x}} = \overline{x \wedge x} = x \uparrow x$

x	y	f_{14}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f_{14} = x \uparrow y$ (NAND, 1-Min)

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Funktionale Vollständigkeit von NAND

2. Oder $\{\vee\}$:

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$$
$$= \overline{x} \uparrow \overline{y} = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$$

3. Und $\{\wedge\}$:

$$x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{x \uparrow y}$$
$$= (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$$

$\Rightarrow$ **Funktional vollständig**

x	y	f_{14}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f_{14} = x \uparrow y$ (NAND, 1-Min)

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Funktionale Nicht-Vollständigkeit von $\{\rightarrow, 1\}$

- Bekannt: $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ist funktional vollständig
- Frage: Ist $\{\rightarrow, 1\}$ nicht funktional vollständig?
- Vorgehen: Versuche ein bekanntes fkt. vollst. System mit $\{\rightarrow, 1\}$ darzustellen.
- Zeige, dass sich eine der Funktionen mit keiner Kombination darstellen lässt.

x	y	f_{13}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f_{13} = x \rightarrow y$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Funktionale Nicht-Vollständigkeit von $\{\rightarrow, 1\}$

- Nicht $\{\neg\}$: $\overline{x} = \ ?$
- Mögliche Kombinationen von x mit $\{\rightarrow, 1\}$:

$$1 \rightarrow 1 = 1$$
$$1 \rightarrow x = x$$
$$x \rightarrow 1 = 1$$
$$x \rightarrow x = 1$$

x	y	f_{13}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$f_{13} = x \rightarrow y$

- Es lassen sich keine neuen Funktionen und insbesondere kein Nicht $\{\neg\}$ darstellen.

$\Rightarrow$ **Nicht funktional vollständig**

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

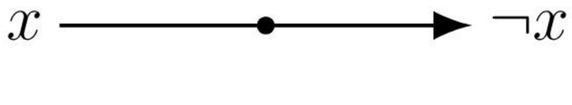
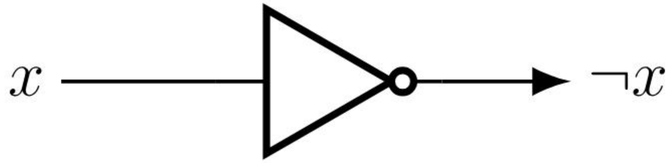
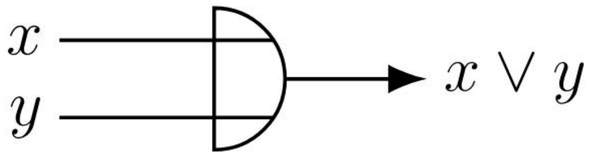
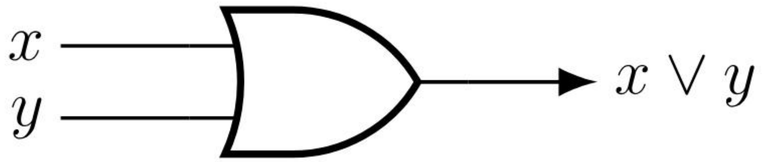
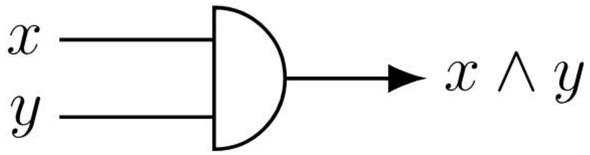
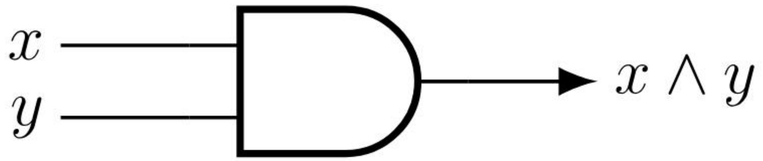
Abschnitt 2.5

Schaltnetze

- DAG-Darstellung
- Anwendung: Schaltungsabhängige Fehlerdiagnose

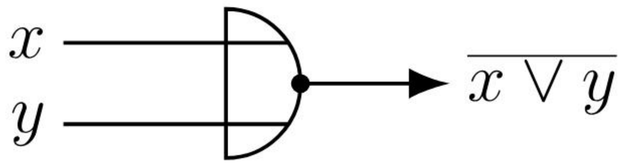
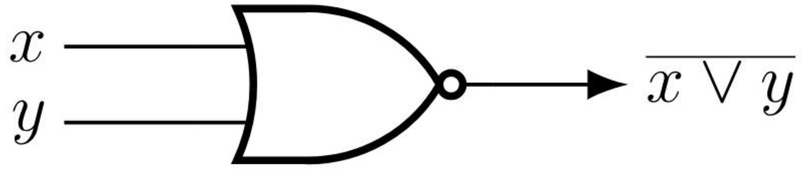
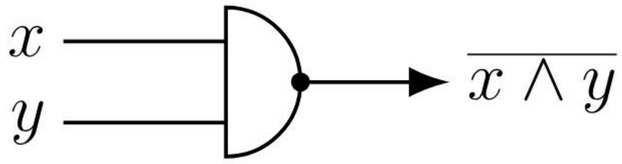
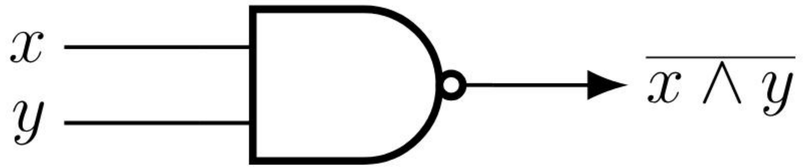
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Grundbausteine zur Realisierung Boolescher Funktionen

Funktion	Unser Symbol	IEEE-Symbol
Negation (Komplement-Gatter)		
Addition (Oder-Gatter)		
Multiplikation (Und-Gatter)		

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Grundbausteine zur Realisierung Boolescher Funktionen

Funktion	Unser Symbol	IEEE-Symbol
NOR-Gatter		
NAND-Gatter		

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel

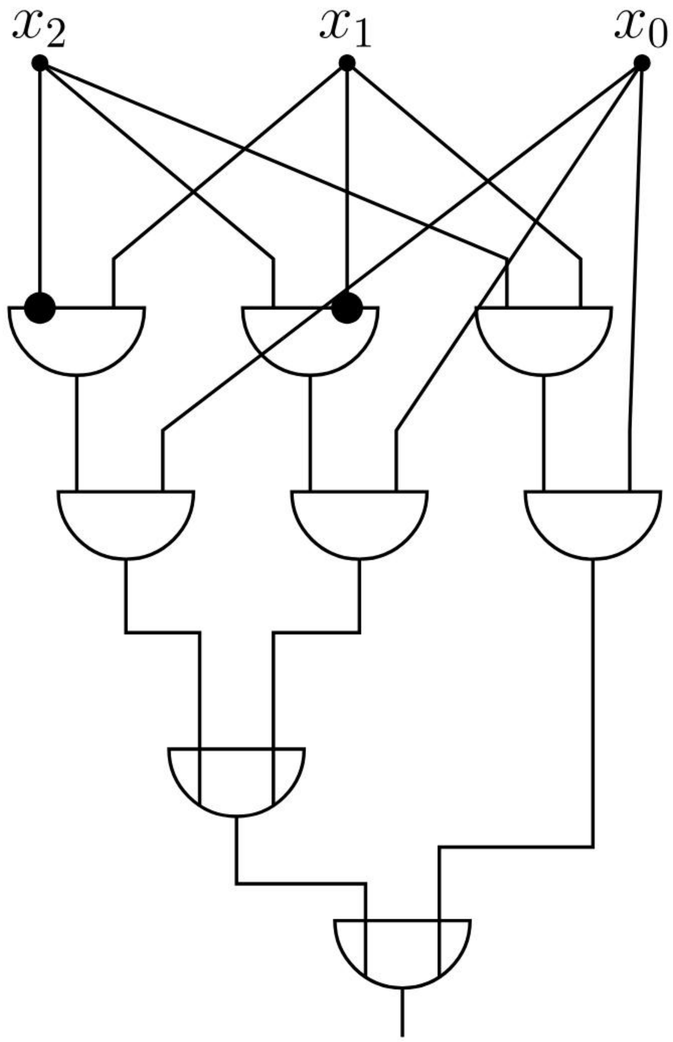
Sei $f : B^3 \to B$ gegeben durch die Tabelle.

DNF:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= m_3 \vee m_5 \vee m_7 \\ &= \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_2 \overline{x_1} x_0 \vee x_2 x_1 x_0 \end{aligned}$$

i	x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Beispiel

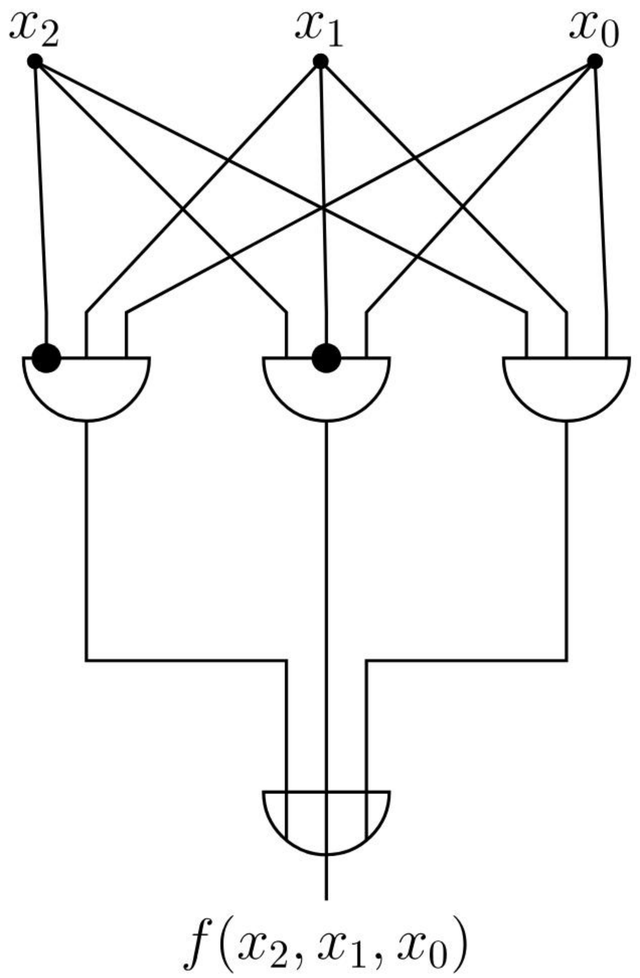


$f(x_2, x_1, x_0)$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel

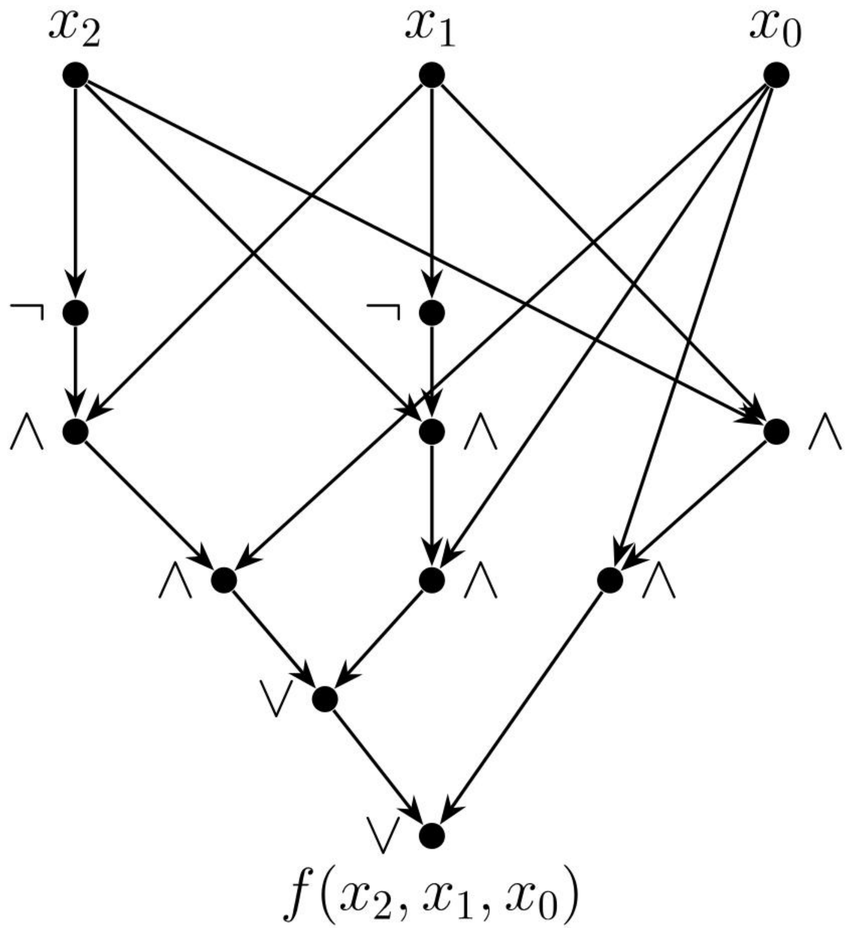
Alternative Schaltung:



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

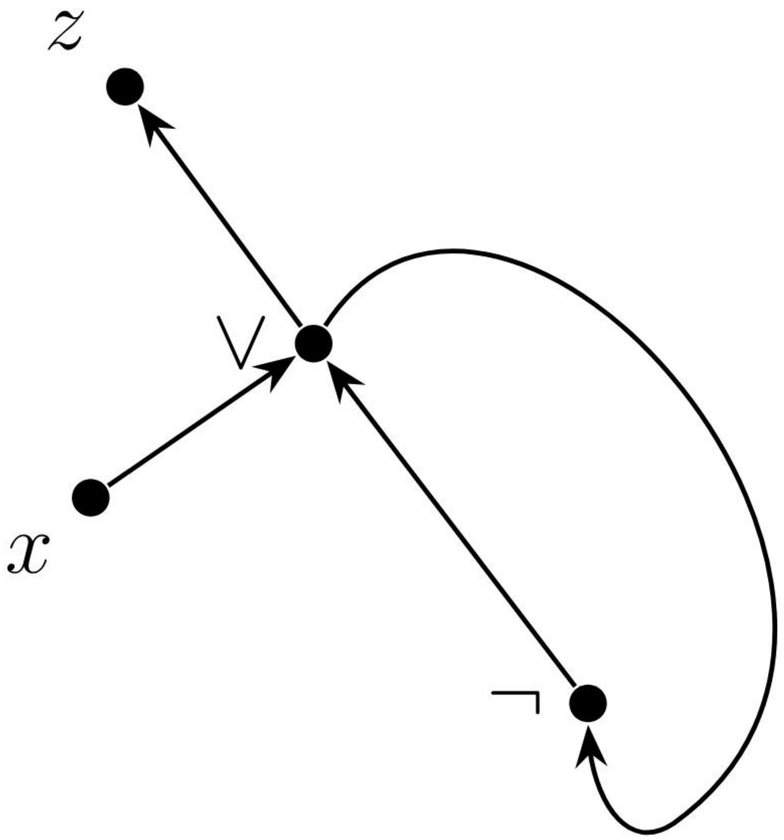
DAG-Darstellung

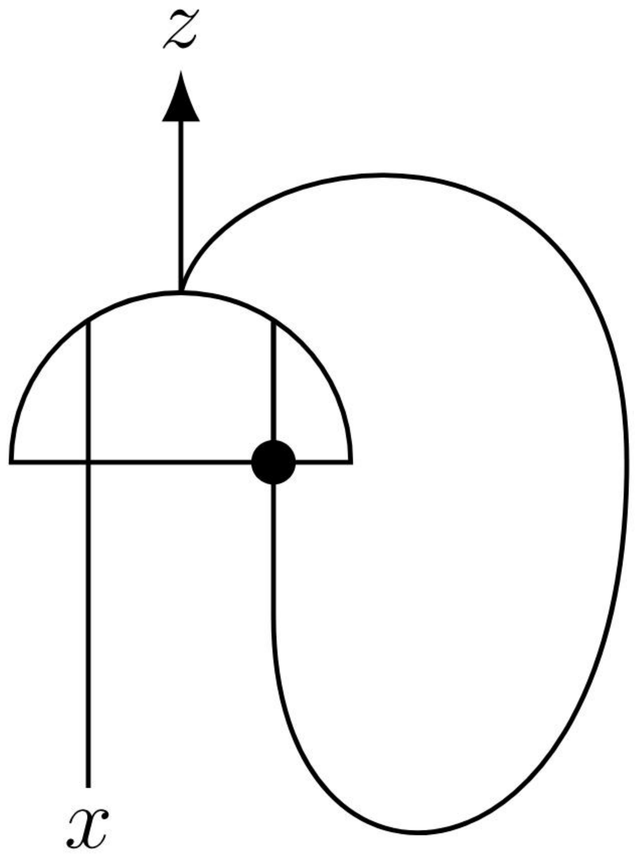
DAG = Directed Acyclic Graph (gerichteter azyklischer Graph)



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

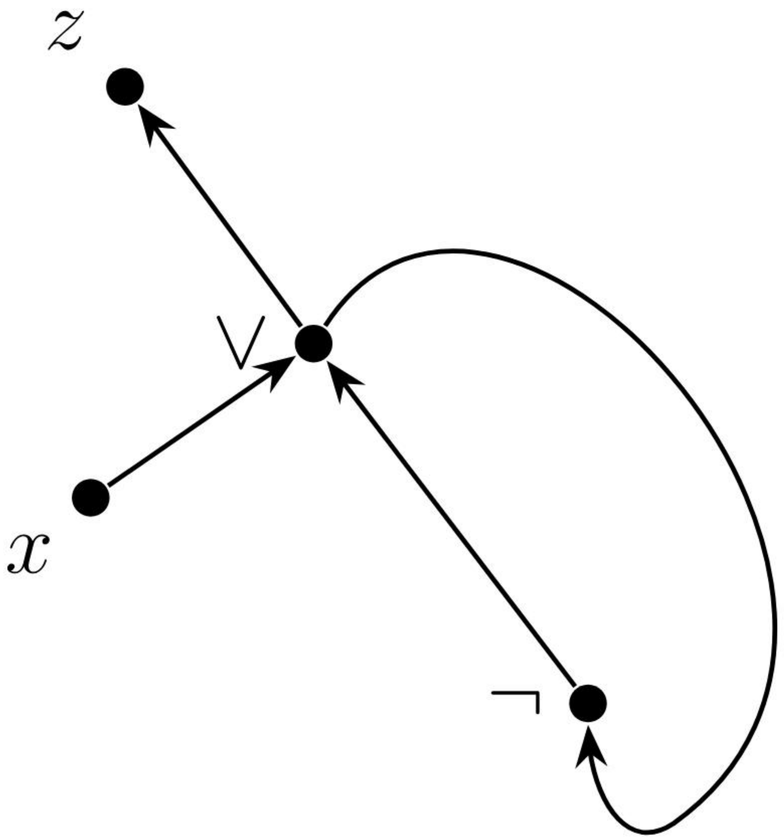
Beispiel für zyklischen Graph: Flimmerschaltung

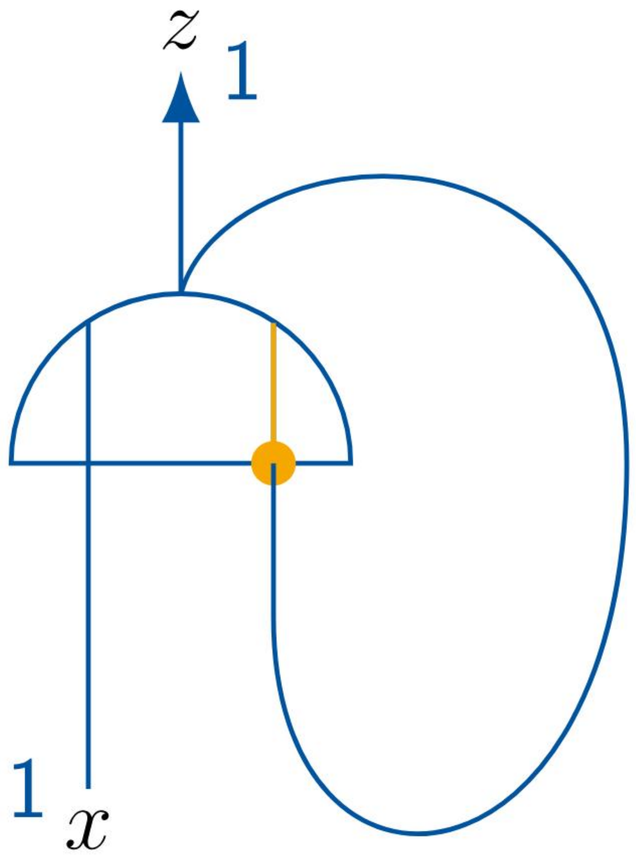




Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

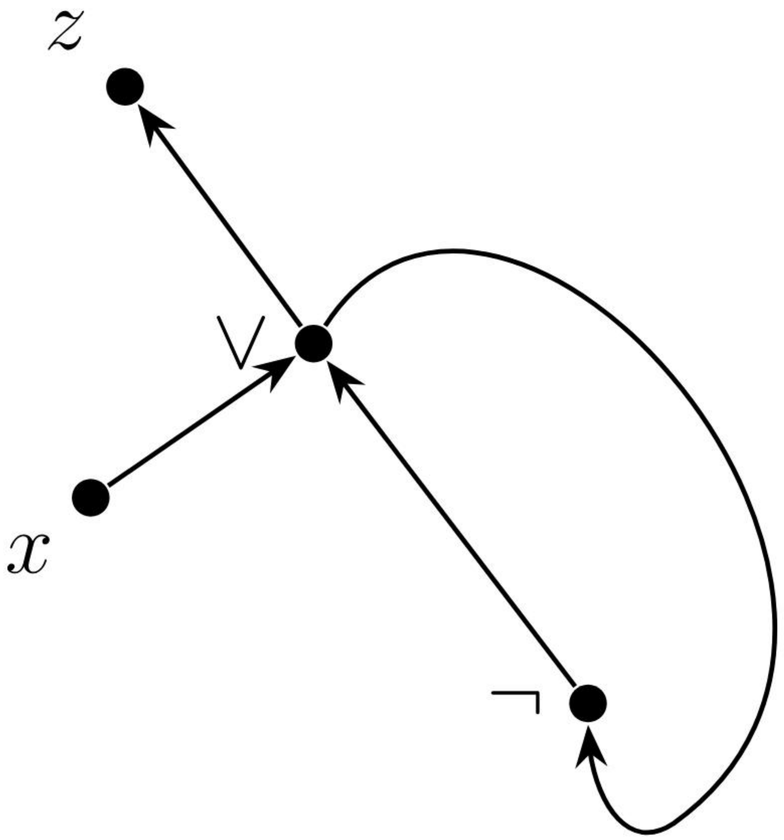
Beispiel für zyklischen Graph: Flimmerschaltung

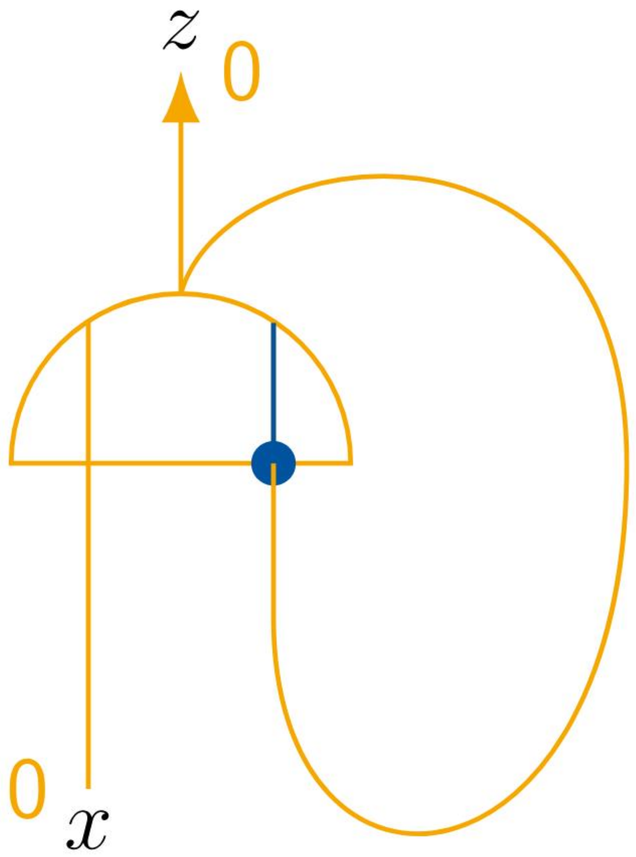




Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel für zyklischen Graph: Flimmerschaltung





Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Anwendung: Schaltungsabhängige Fehlerdiagnose

Beispiel:

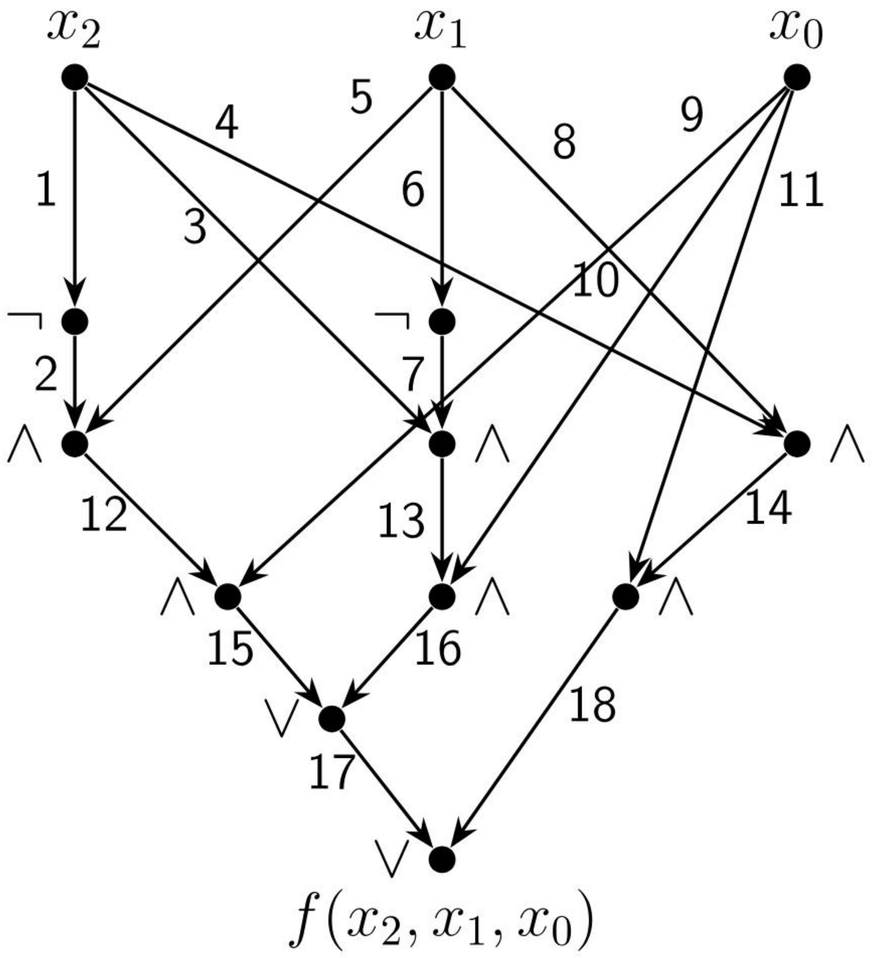
$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_2 \overline{x_1} x_0 \vee x_2 x_1 x_0$$

Annahmen:

- Es tritt im gegebenen Schaltnetz höchstens ein Fehler auf
- Der Defekt, welcher den Fehler verursacht, ist ein gerissener Verbindungsdraht

Hier: **0-Verklemmung** bzw. **Stuck-at-Zero-Fault**

DAG mit Drahtnummern



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Darstellung von f

f_i: die von der Schaltung berechnete Funktion, wenn Draht i gerissen ist (Wert 0).

$$f_1 = \overline{0} \wedge x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_2x_1x_0 = x_1x_0 \vee x_2x_0$$
$$f_2 = 0 \wedge x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_2x_1x_0 = x_2x_0$$
$$f_3 = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2x_1x_0 = x_1x_0$$
$$f_4 = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0$$
$$f_5 = x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_2x_1x_0 = x_2x_0$$
$$f_6 = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2x_0$$
$$f_7 = x_1x_0$$
$$f_8 = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0$$
$$f_9 = x_2x_0$$
$$f_{10} = x_1x_0$$
$$f_{11} = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0$$
$$f_{12} = 0 \wedge x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_2x_1x_0 = x_2x_0$$
$$f_{13} = x_1x_0$$
$$f_{14} = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0$$
$$f_{15} = x_2x_0$$
$$f_{16} = x_1x_0$$
$$f_{17} = x_2x_1x_0$$
$$f_{18} = \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_2\overline{x_1}x_0$$

Hinweis: $xyz \vee x\bar{y}z = xz$

Fehlermöglichkeiten (Ausfalltafel/-matrix)

x_2	x_1	x_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0

Reduzierte Ausfallmatrix

Es gilt:

$$f_1 = f_6$$
$$f_2 = f_5 = f_9 = f_{12} = f_{15}$$
$$f_3 = f_7 = f_{10} = f_{13} = f_{16}$$
$$f_4 = f_8 = f_{11} = f_{14} = f_{18}$$

x_2	x_1	x_0	f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_{17}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

Fehlermatrix

Zeilen-Nr.	x_2	x_1	x_0	f	$f \oplus f_1$	$f \oplus f_2$	$f \oplus f_3$	$f \oplus f_4$	$f \oplus f_{17}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	1	0	0	1
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	1	0	0	1	0	1
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	0	0	0	1	0

- Eine 1 in Spalte $f \oplus f_i$: Mit dieser Eingabe ist der Fehler f_i erkennbar ($f \neq f_i$).

Abschnitt 2.6

Alternative Darstellungen

- Kofaktoren
- Geordnete Binäre Entscheidungs-Diagramme (OBDD)
- Gray-Code
- Karnaugh-Diagramme

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

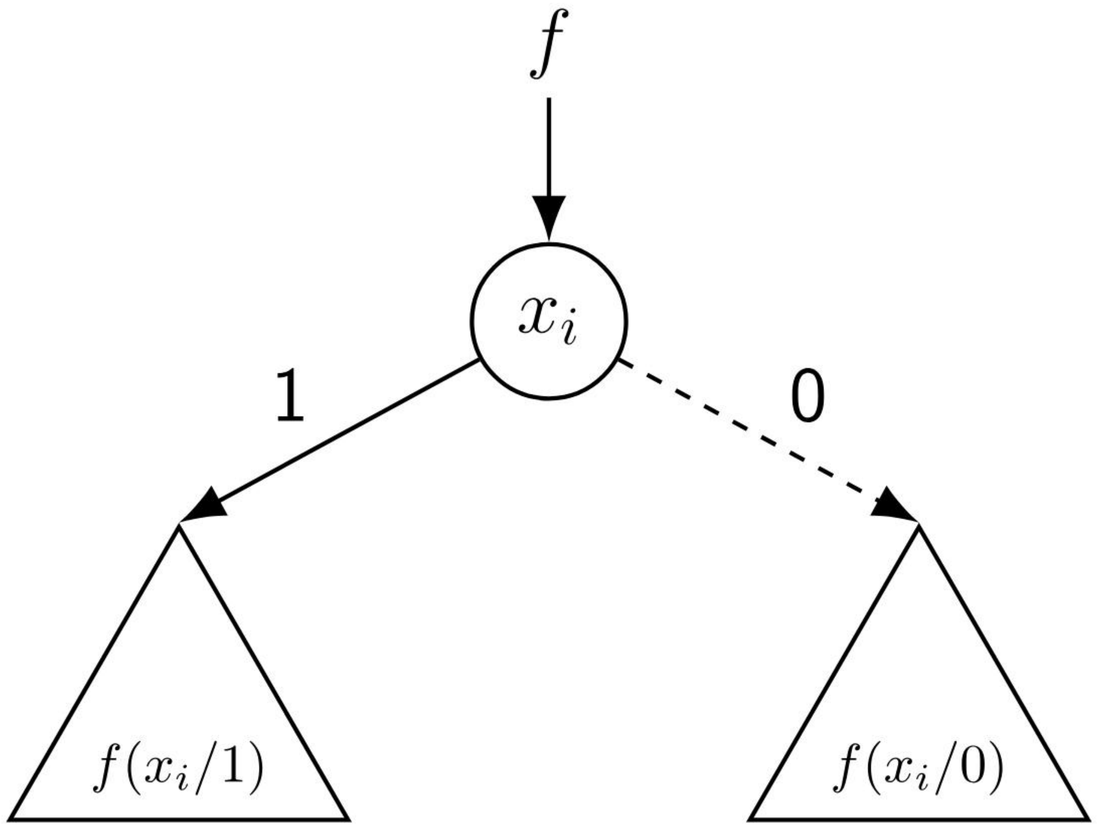
Kofaktoren

$$f(x_i/a) = f(x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, a, x_{i-1}, \dots, x_0)$$

Dabei sei a ein fester Wert:

- **Positiver Kofaktor:** $f(x_i/1) = f(x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, 1, x_{i-1}, \dots, x_0)$
- **Negativer Kofaktor:** $f(x_i/0) = f(x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, 0, x_{i-1}, \dots, x_0)$

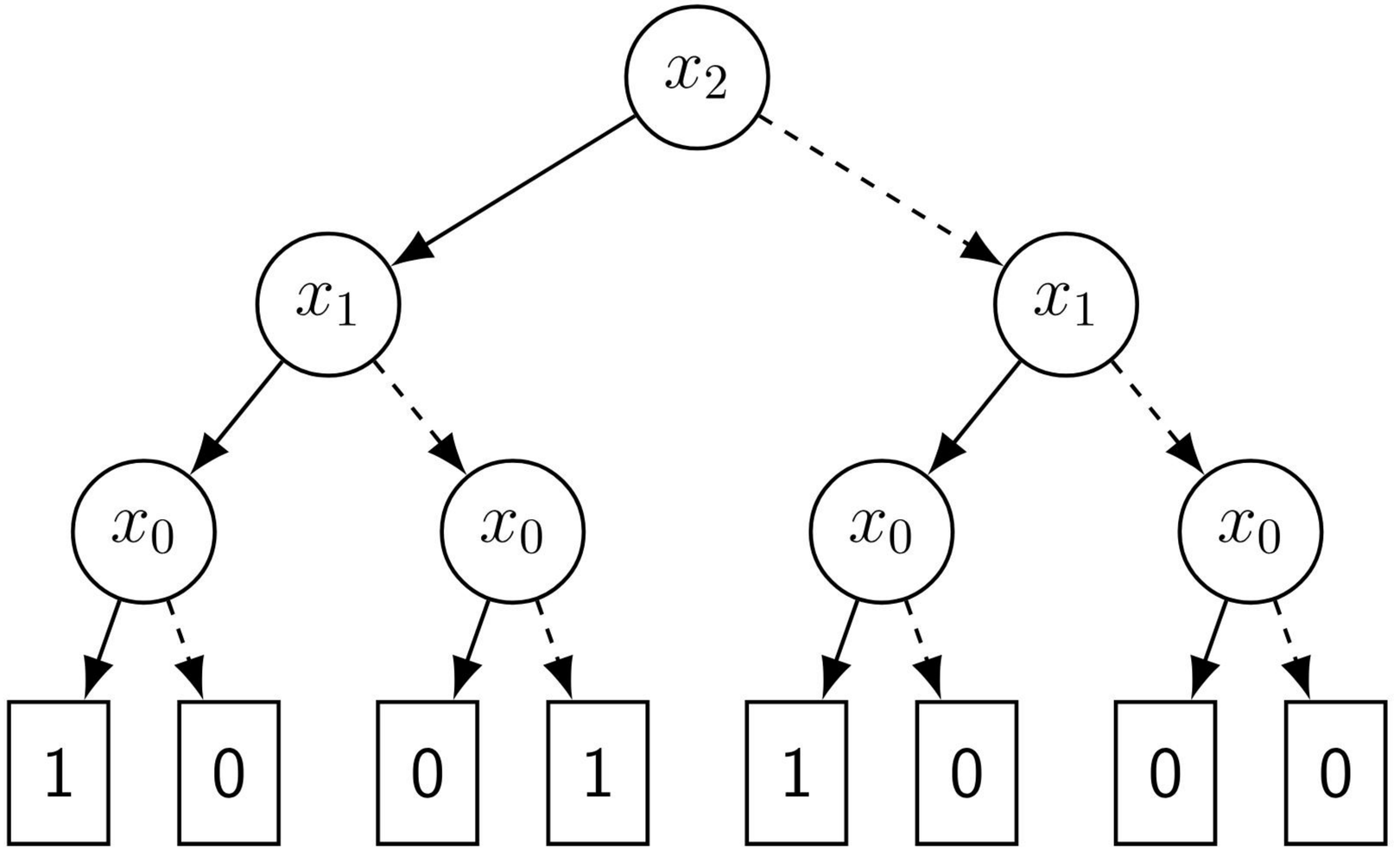
Baumdarstellung einer Booleschen Funktion anhand der Kofaktoren



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

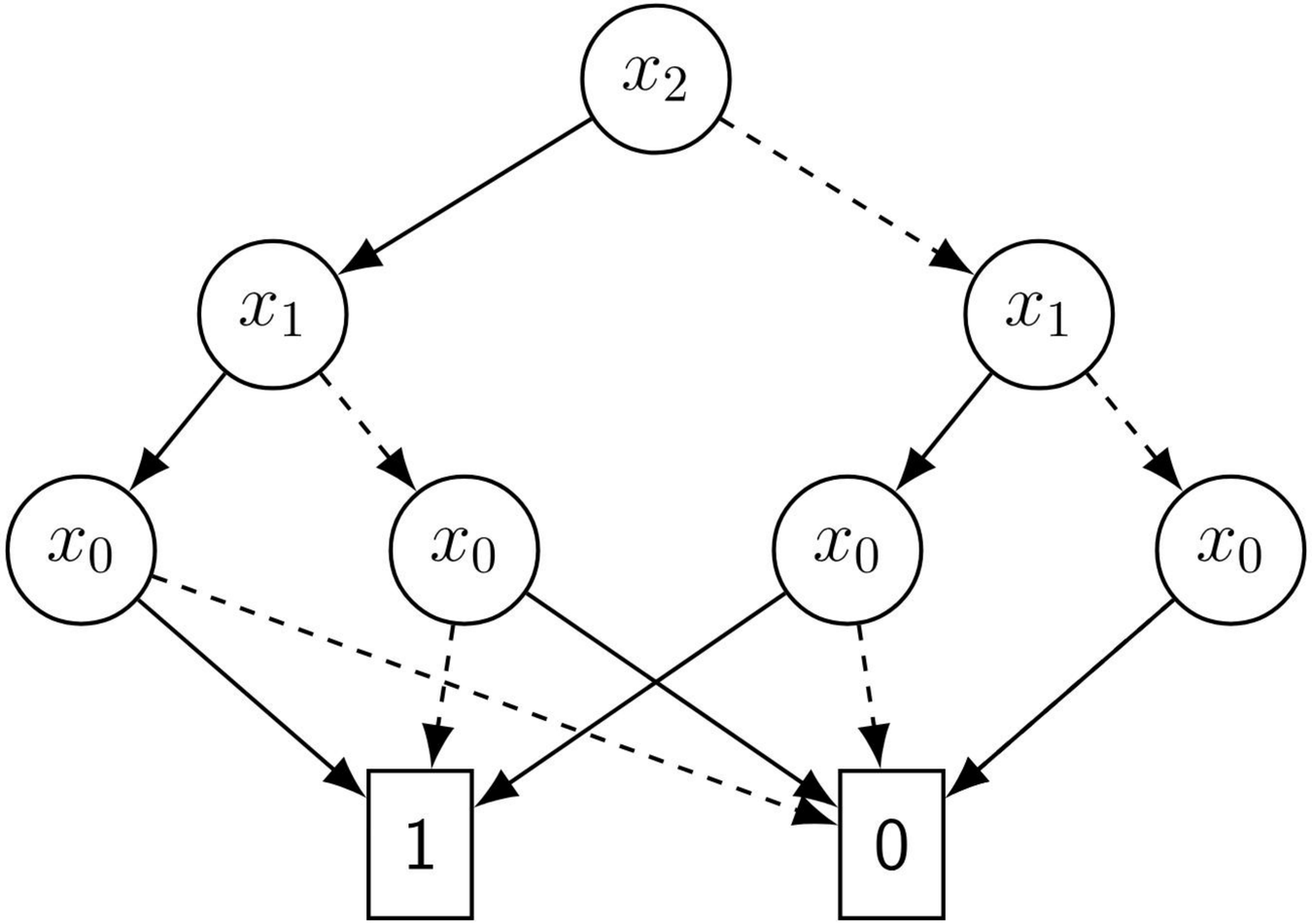
Beispiel: Funktion als Entscheidungsbaum

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

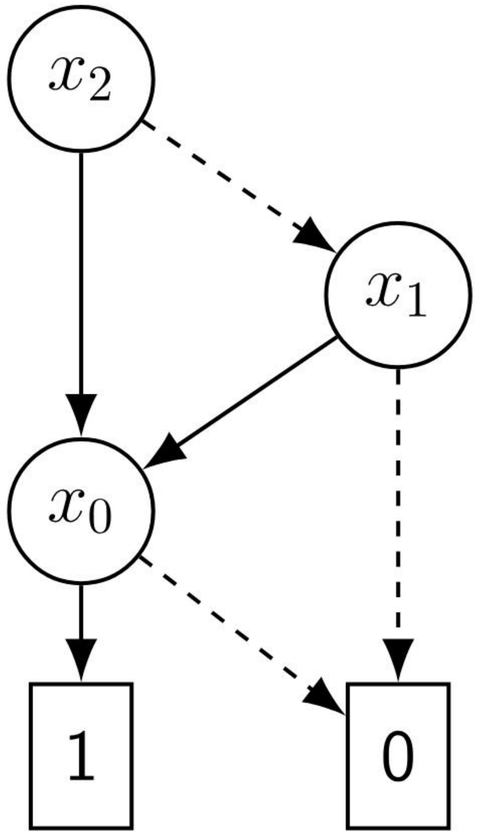
Beispielbaum nach Zusammenlegen der Blätter



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 2

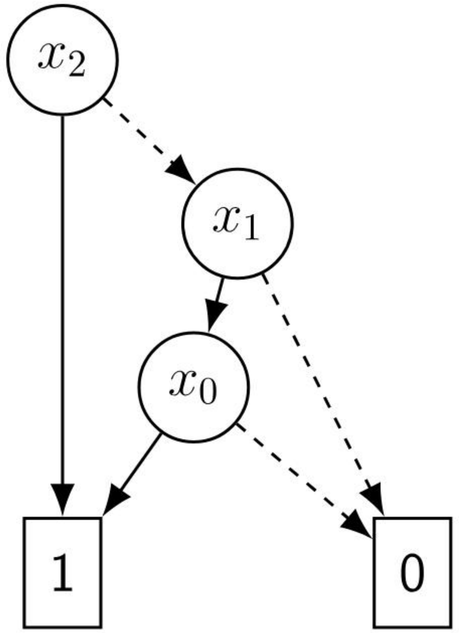
$f = \ ?$



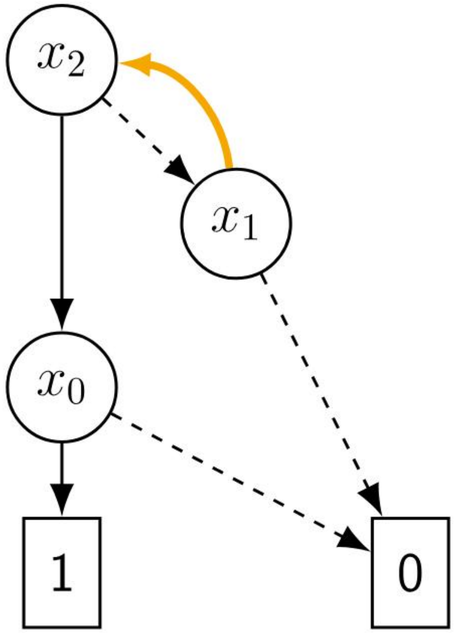
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

OBDD: Ordered Binary Decision Diagram

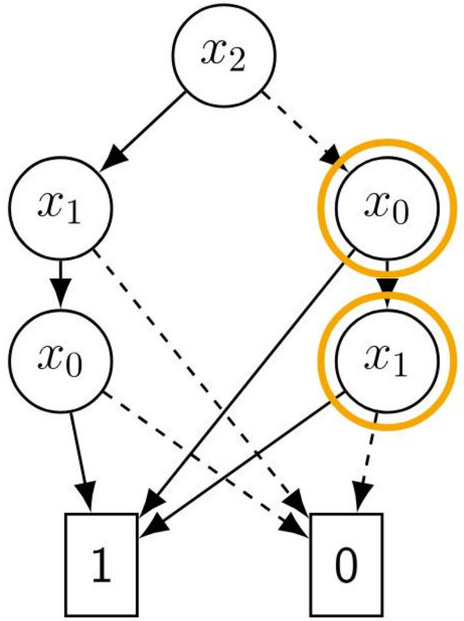
- **BDD** (Binary Decision Diagram):
  - Jeder innere Knoten prüft **genau eine Variable** auf 0 (gestrichelte Kante) oder 1 (durchgezogene Kante)
  - Auf keinem Pfad wird eine Variable **doppelt** geprüft
  - **Keine Kreise**: Jeder Pfad von der Wurzel endet in einem Blatt 0 oder 1
- **O** (ordered): Es gibt eine **feste Variablenordnung** (z.B. $x_2 < x_1 < x_0$), die auf **allen** Pfaden eingehalten wird
  - Variablen dürfen übersprungen werden: Nicht auf jedem Pfad muss jede Variable geprüft werden



Gültig: Ordnung $x_2 < x_1 < x_0$; die 1-Kante von x_2 überspringt x_1 und x_0



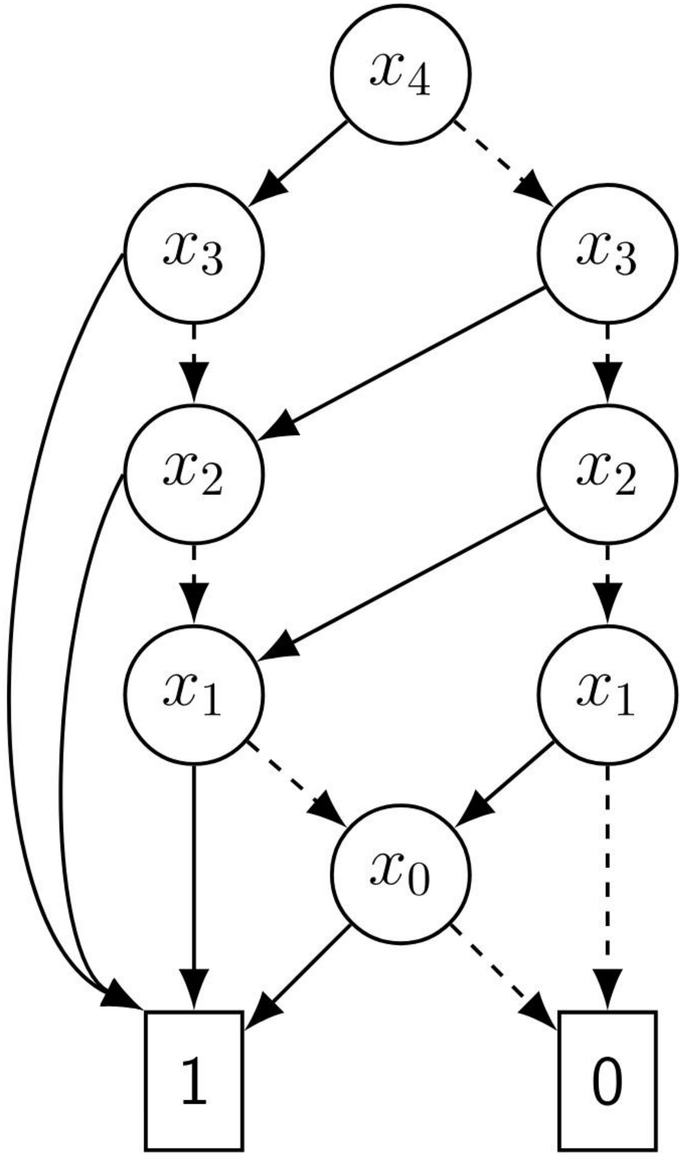
Ungültig: Kreis $x_2 \to x_1 \to x_2$



Ungültig: keine feste Variablenordnung (x_1 vor x_0 links, x_0 vor x_1 rechts)

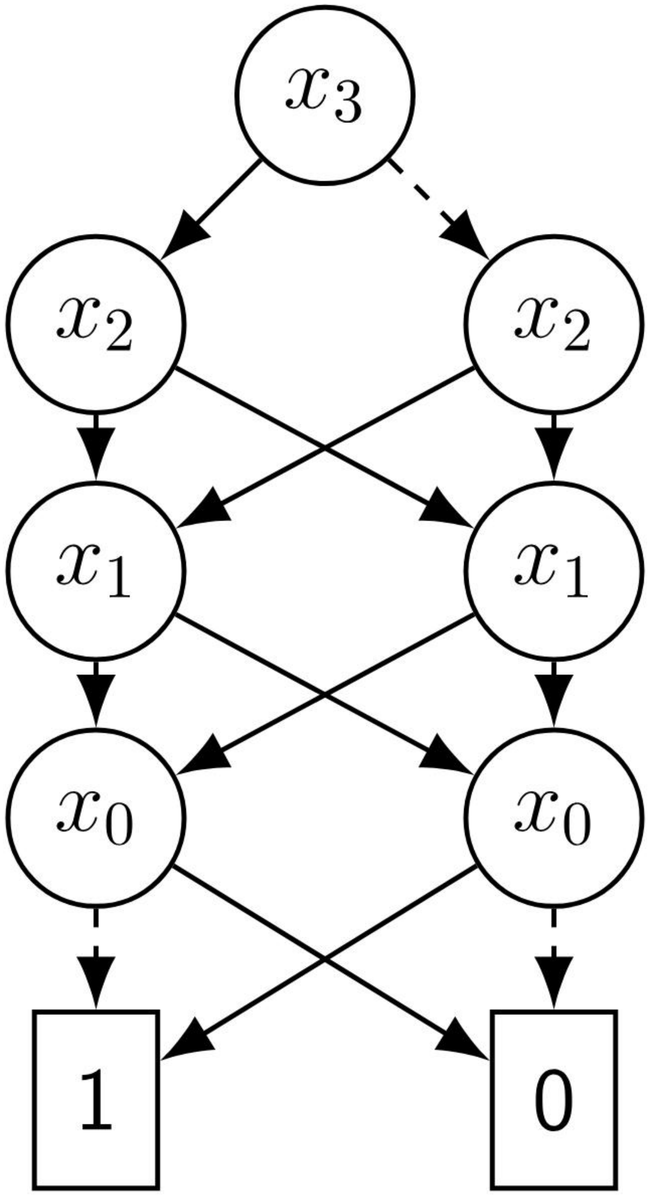
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel: OBDD für die „Schwellenwert-Funktion“ $f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = T_2^5$



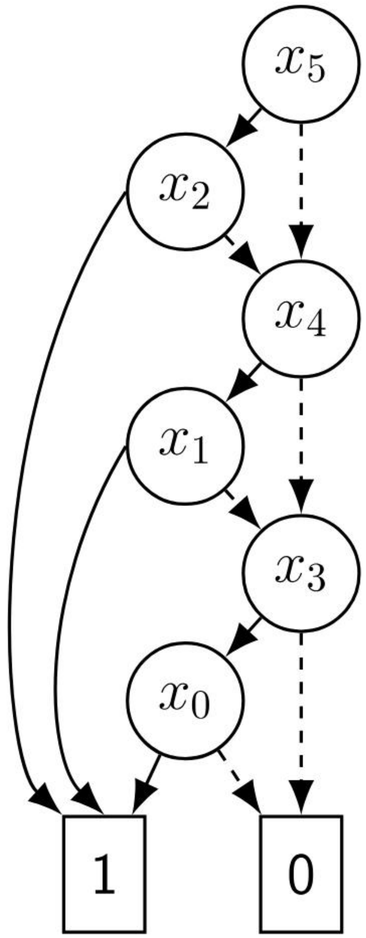
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel: OBDD für die „Ungerade-Paritäts-Funktion“



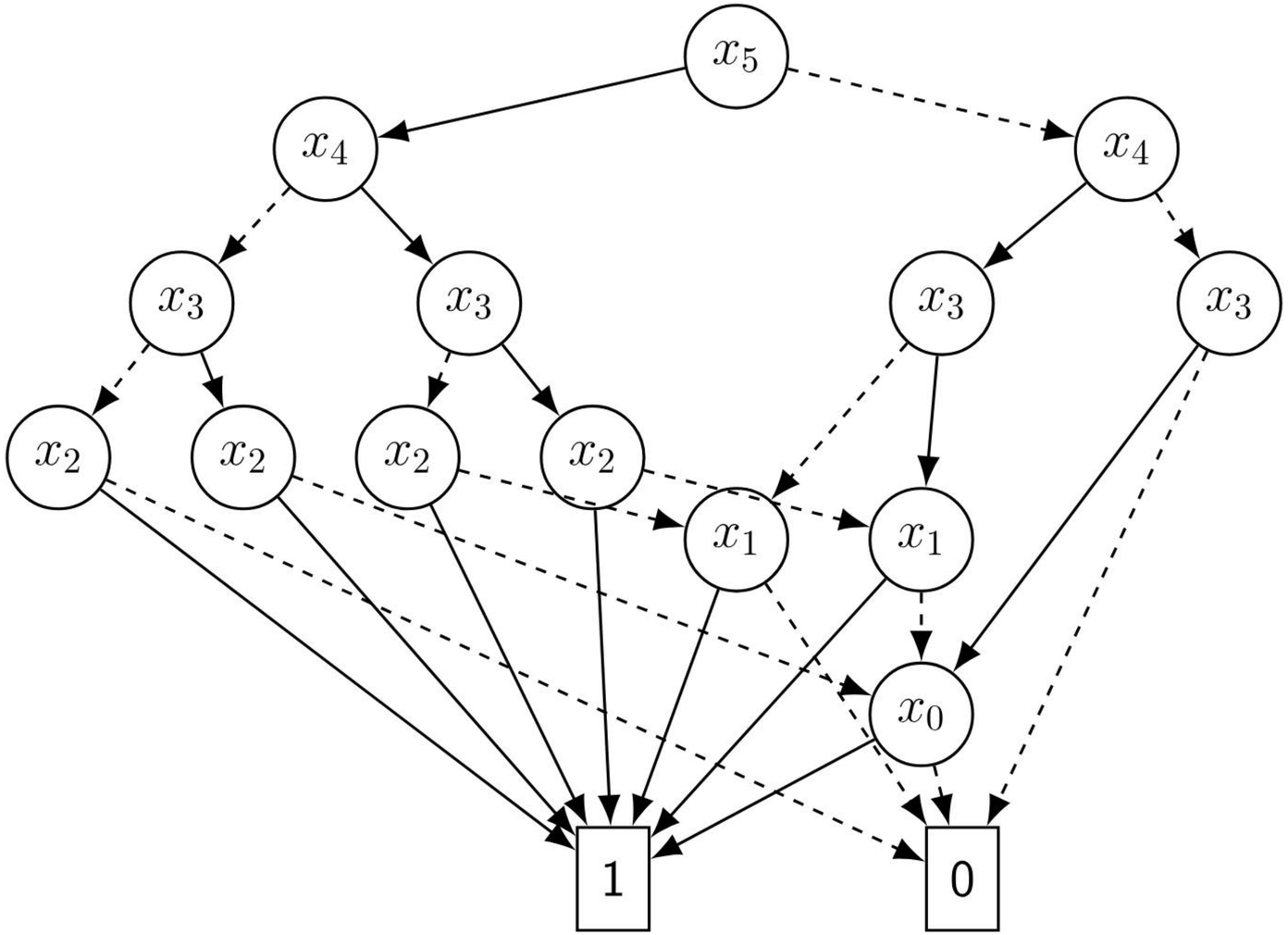
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

OBDD zur Variablenordnung $V_1 = x_5 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_1 \leq x_3 \leq x_0$



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

OBDD zur Variablenordnung $V_2 = x_5 \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$



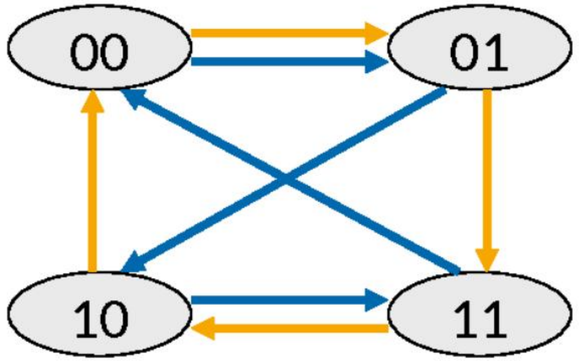
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gray-Code

- Generierungsverfahren zur **robusten** Übertragung
- Eigenschaft:
  Die Darstellung zweier benachbarter Zahlen unterscheidet sich nur durch **1 Bit**
- Generierung (eine Möglichkeit), Beispiel für die Zahl 3:
  1. Zahl im Binärcode darstellen: $x_1 = (11)_2$
  2. Links-Shift um 1 Bit: $x_2 = x_1 \ll 1 = (110)_2$
  3. XOR-Verknüpfung: $x_3 = x_1 \oplus x_2 = (101)_2$
  4. Rechts-Shift um 1 Bit: $x_4 = x_3 \gg 1 = (10)_2$

Beispiel: 2-Bit Gray-Code

Dualzahl	Gray-Code
00	00
01	01
10	11
11	10



Normale Reihenfolge

Gray-Code

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel: 3-Bit Gray-Code

c_2	c_1	c_0	C_2	C_1	C_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

- $c_2c_1c_0$: Dualzahl, $C_2C_1C_0$: zugehöriger Gray-Code

Beispiel: 3-Bit Gray-Code

$$C_2 = f(c_2, c_1, c_0) = c_2\overline{c_1}\,\overline{c_0} \vee c_2\overline{c_1}c_0 \vee c_2c_1\overline{c_0} \vee c_2c_1c_0$$

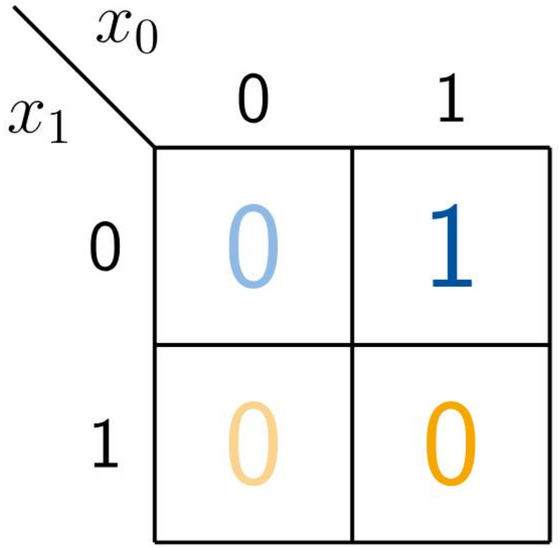
$$C_1 = g(c_2, c_1, c_0) = \overline{c_2}c_1\overline{c_0} \vee \overline{c_2}c_1c_0 \vee c_2\overline{c_1}\,\overline{c_0} \vee c_2\overline{c_1}c_0$$

$$C_0 = h(c_2, c_1, c_0) = \overline{c_2}\,\overline{c_1}c_0 \vee \overline{c_2}c_1\overline{c_0} \vee c_2\overline{c_1}c_0 \vee c_2c_1\overline{c_0}$$

Karnaugh-Diagramme für n = 2

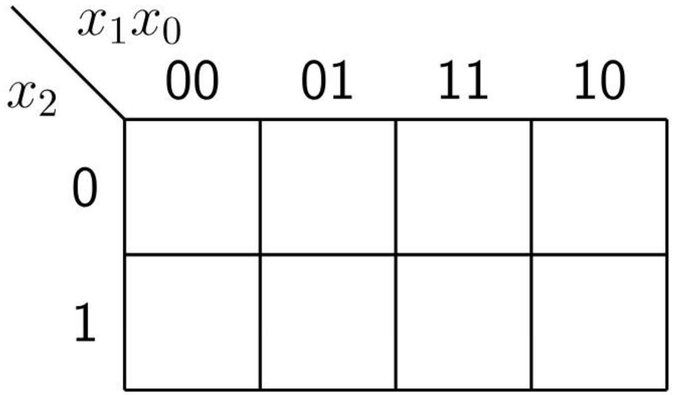
i	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	0

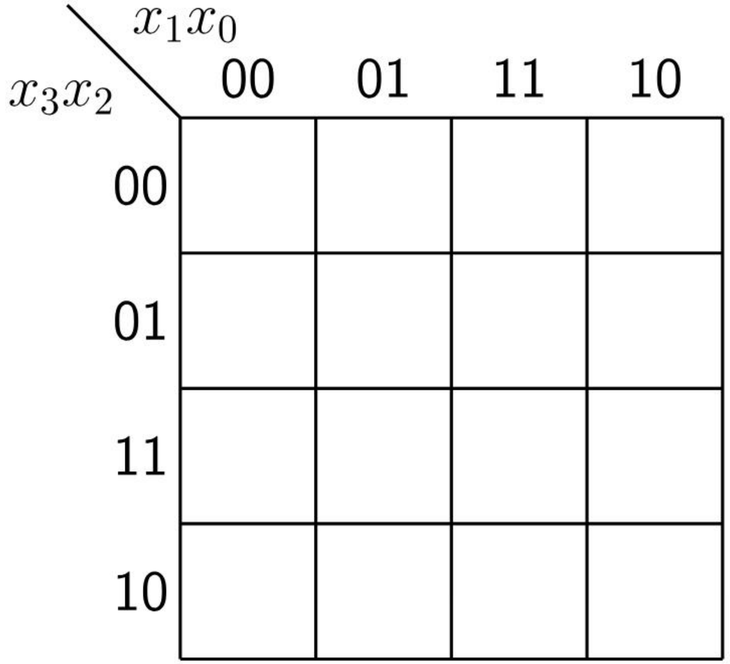




Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Karnaugh-Diagramme für n = 3, 4





- Spalten und Zeilen sind im **Gray-Code** angeordnet: Benachbarte Felder unterscheiden sich in genau einer Variablen.

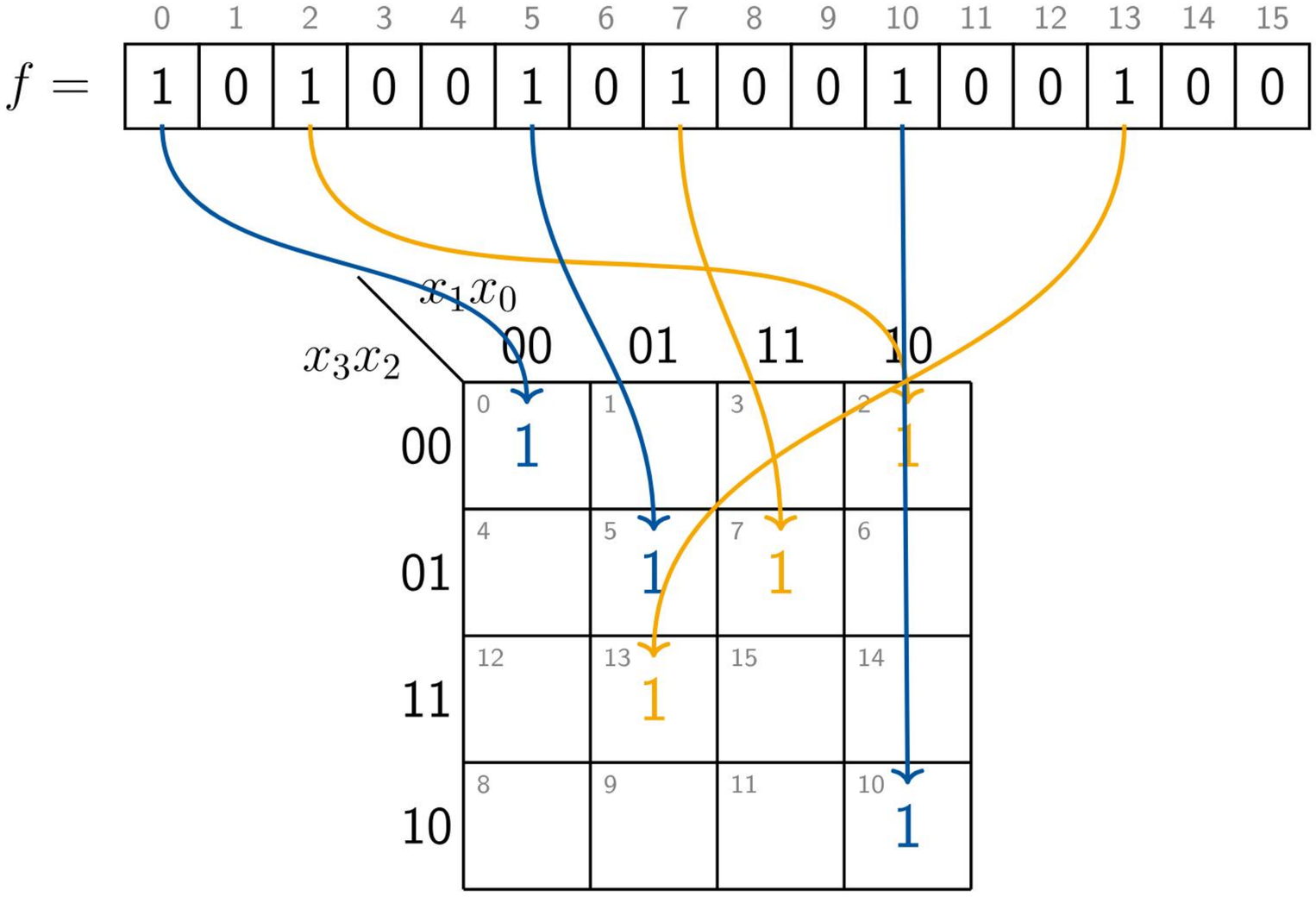
Beispiel: Vom Wertevektor zum Karnaugh-Diagramm

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f =$	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel: Vom Wertevektor zum Karnaugh-Diagramm



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Zusammenfassung

- **Boolesche Algebra** als formale Grundlage in der Schaltungstechnik und der Computerhardware
- Mehrere Möglichkeiten Boolesche Funktionen darzustellen: KNF, DNF, DAGs, OBDDs, Karnaugh-Diagramme
- Gray-Code: Generierungsverfahren zur **robusten** Übertragung