Einführung in die Technische Informatik

Prof. Jian-Jia Chen | Dr.-Ing. Christian Hakert | Dr. rer. nat. Marcus Völker

RWTH Aachen University

Kapitel 3: Vereinfachung Boolescher Funktionen

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Vereinfachung Boolescher Funktionen

Resolutionsregel: $ab \vee a\bar{b} = a(b \vee \bar{b}) = a \wedge 1 = a$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_2 x_1 x_0 \\ &= (\overline{x_2} \vee x_2) x_1 x_0 \\ &= x_1 x_0 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1, x_0) &= x_3 \overline{x_2} x_1 x_0 \vee x_3 \overline{x_2}\,\overline{x_1} x_0 \vee x_3 x_2 x_1 x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2} x_1 x_0 \\ &= x_3 \overline{x_2} x_0 \vee x_3 x_1 x_0 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2} x_0 \vee \overline{x_2} x_1 x_0 \\ &= \overline{x_2} x_0 \vee x_3 x_1 x_0 \end{aligned}$$

Minimalpolynom

- Polynom = DF = Sum of products (SoP)
- Sei M ein Polynom für $f : B^n \rightarrow B^1$
- M heißt **Minimalpolynom** *(für f)*, wenn es kein Polynom geringerer Länge für f gibt.
- Die *Länge eines Polynoms* ist definiert als die Anzahl der Literale, die es enthält

Abschnitt 3.1

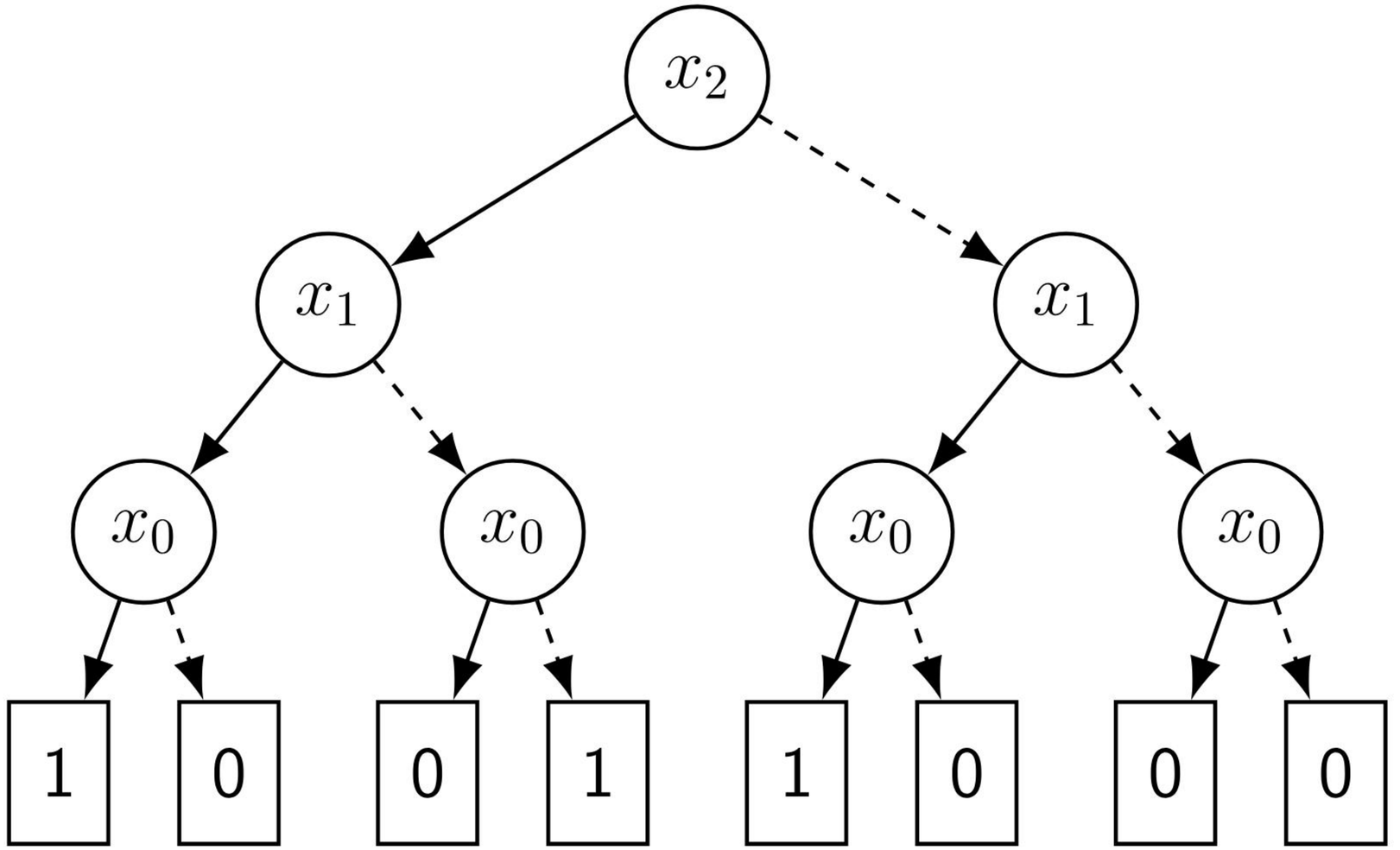
OBDDs und Vereinfachung

- Grundoperationen zur Vereinfachung von OBDDs
- Relevanz der Variablenordnung

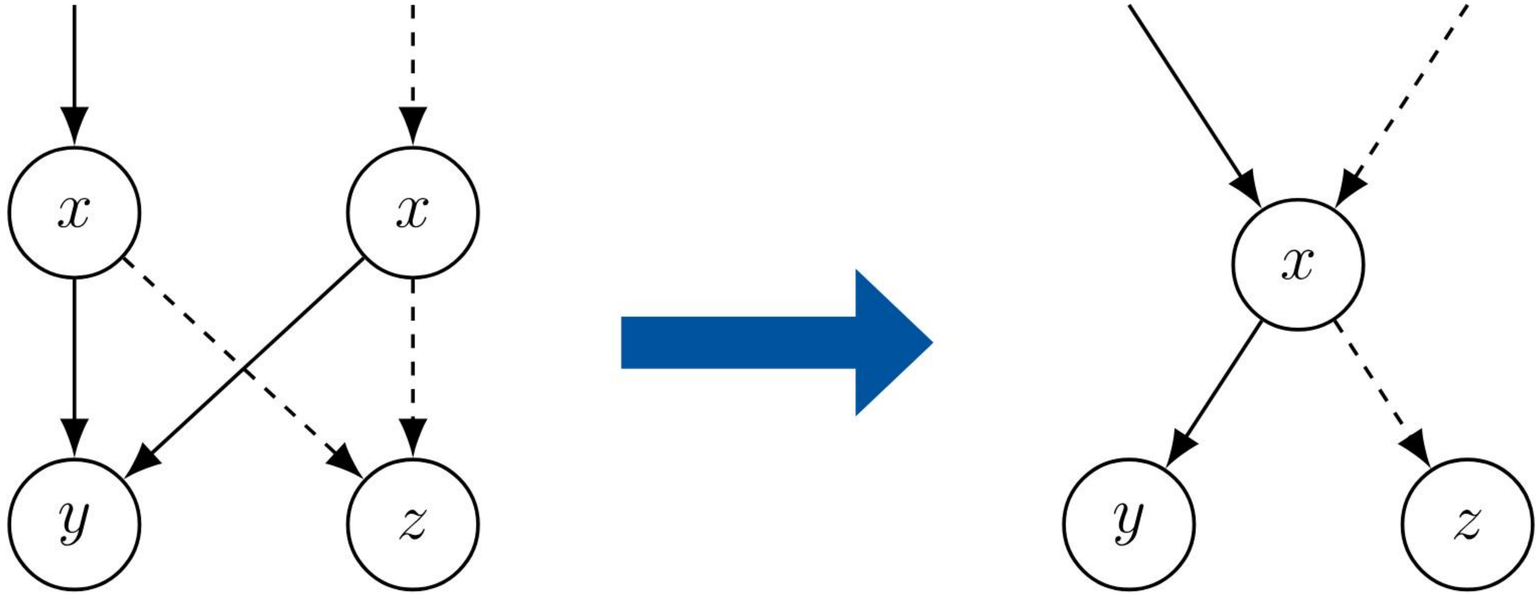
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Wiederholung: Funktion als Entscheidungsbaum

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

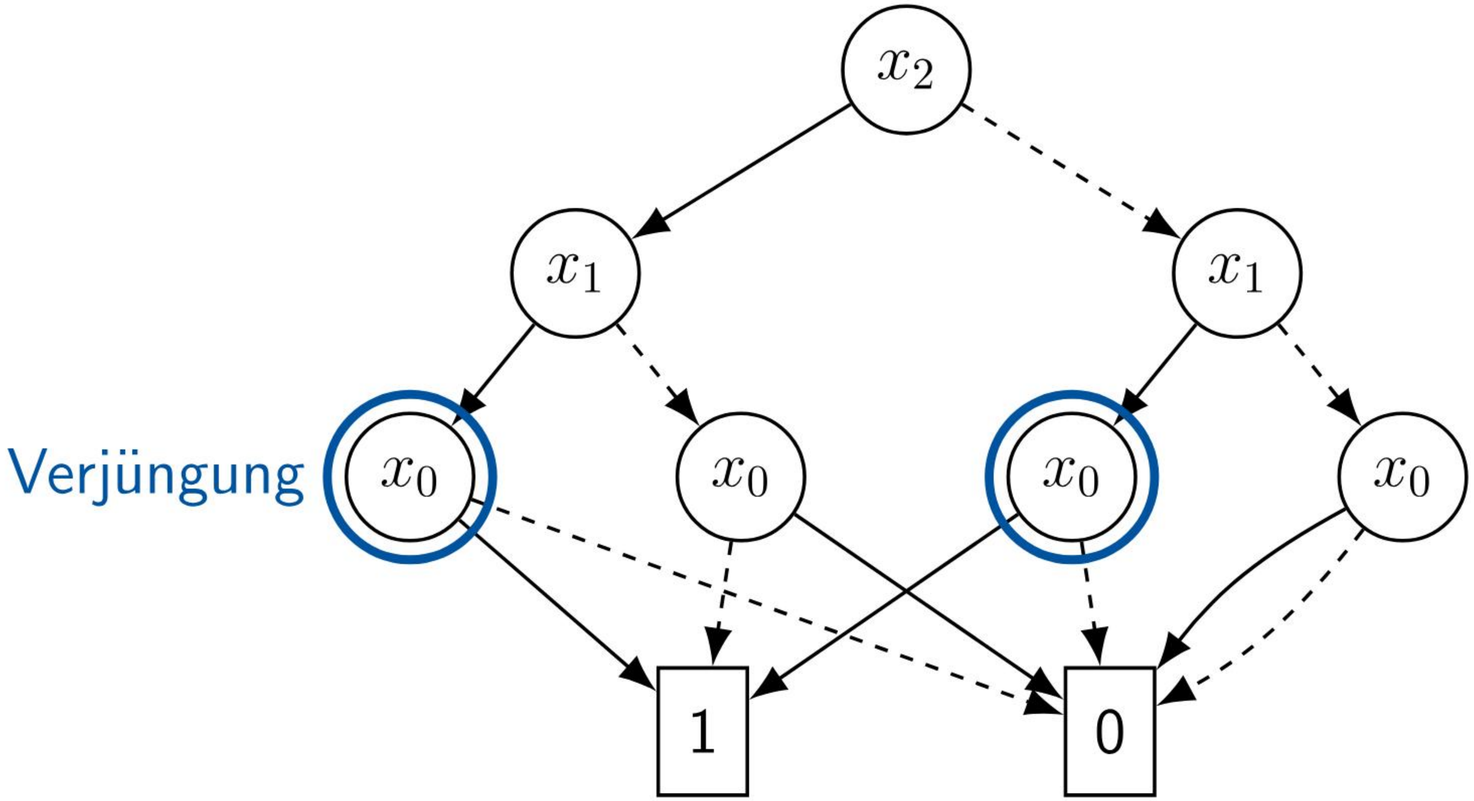


1. Grundoperation zur Vereinfachung von OBDDs: Verjüngung (4-3 Regel)



- Zwei Knoten mit **derselben Variable** und **denselben Nachfolgern** (1-Kante und 0-Kante) werden zu einem Knoten zusammengelegt.
- Alle eingehenden Kanten zeigen danach auf den verbleibenden Knoten.

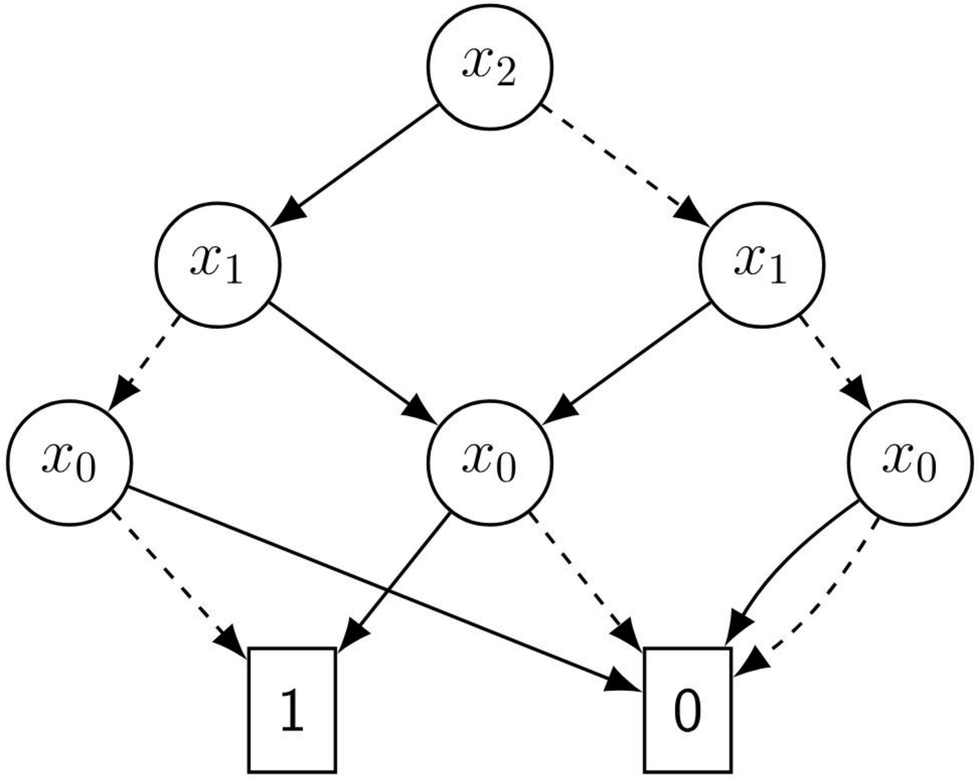
1. Grundoperation zur Vereinfachung von OBDDs: Verjüngung (4-3 Regel)



- Die beiden markierten x_0-Knoten haben dieselben Nachfolger und werden zusammengelegt.

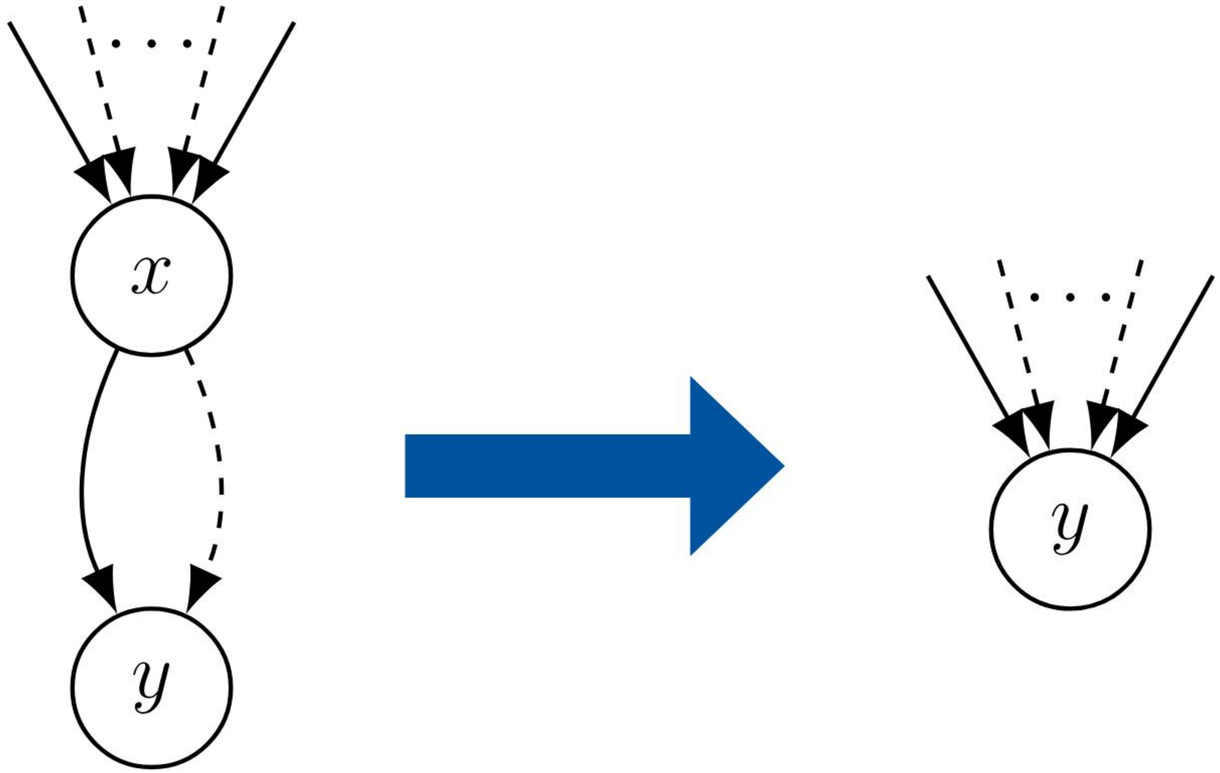
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Grundoperation zur Vereinfachung von OBDDs: Verjüngung (4-3 Regel)



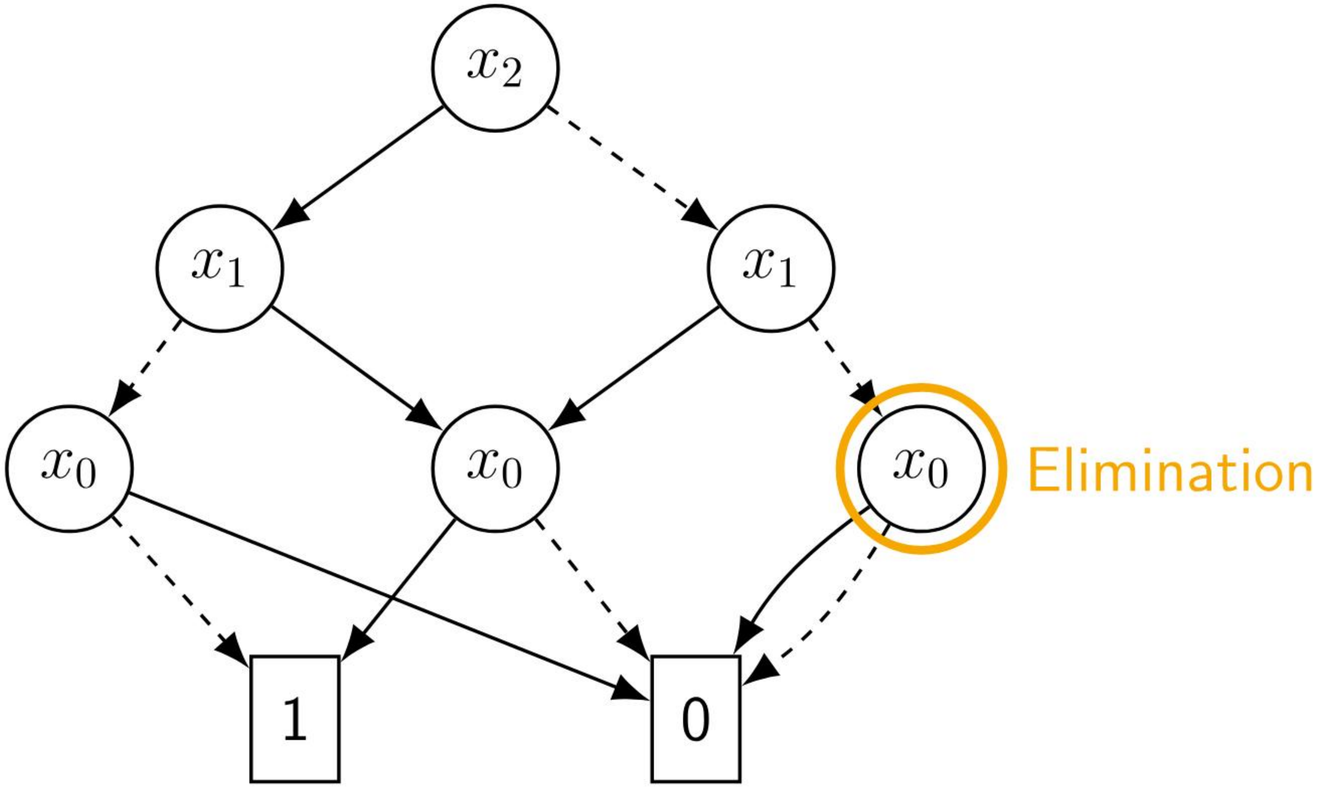
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2. Grundoperation zur Vereinfachung von OBDDs: Elimination (2-1 Regel)



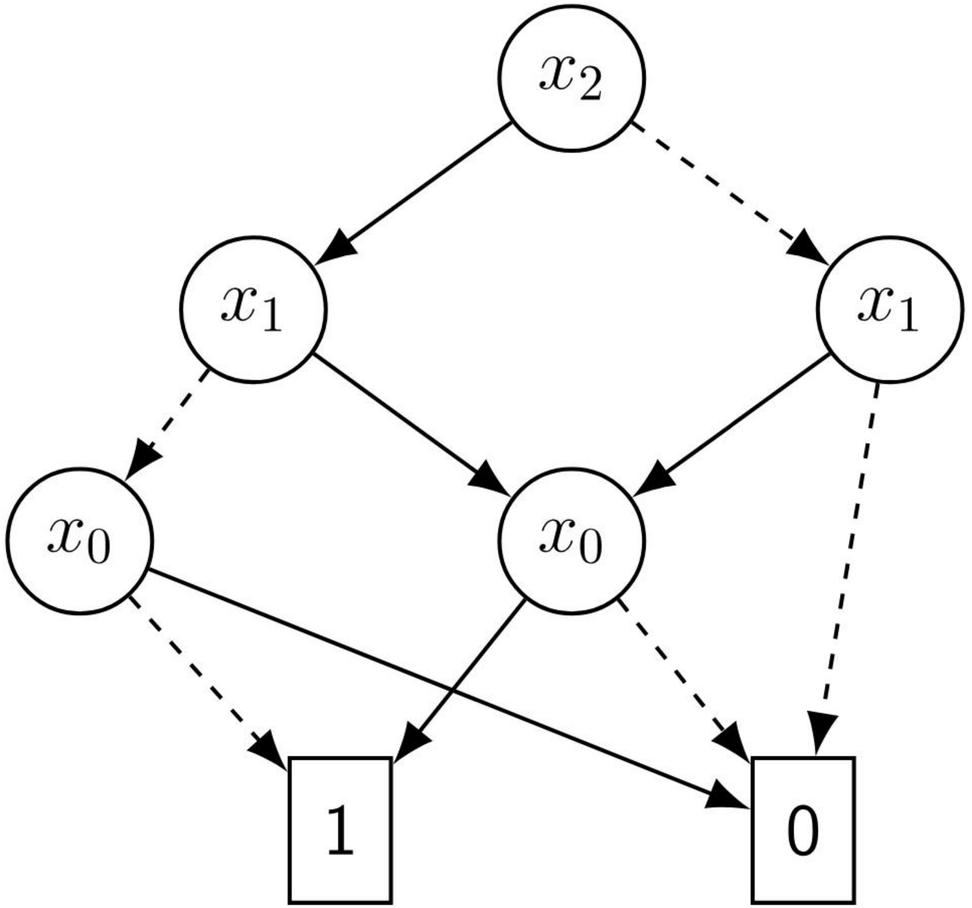
- Zeigen **beide** ausgehenden Kanten eines Knotens auf **denselben** Nachfolger, ist der Test überflüssig: der Knoten wird entfernt.
- Alle eingehenden Kanten zeigen danach direkt auf den Nachfolger.

2. Grundoperation zur Vereinfachung von OBDDs: Elimination (2-1 Regel)



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2. Grundoperation zur Vereinfachung von OBDDs: Elimination (2-1 Regel)

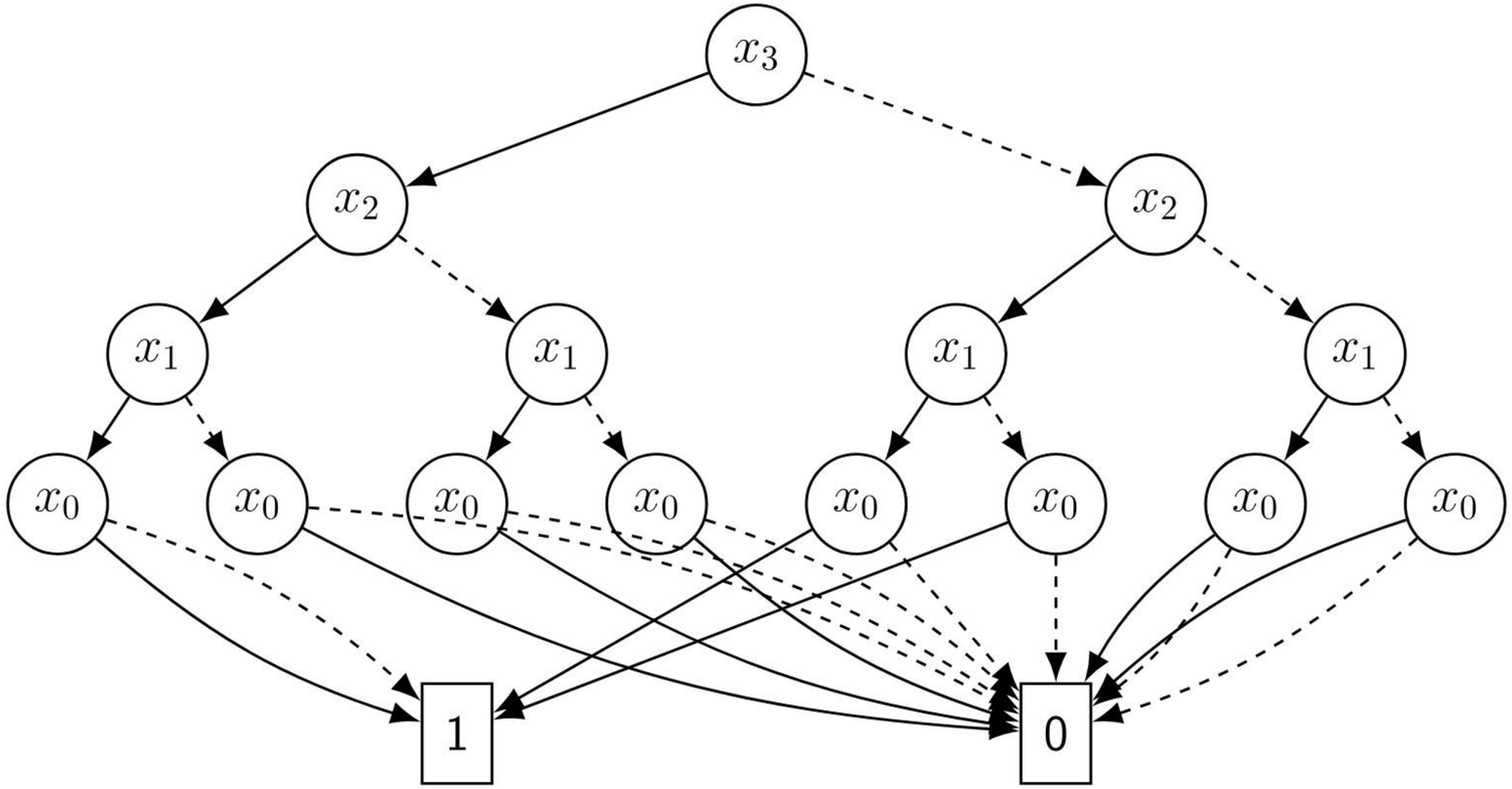


- Das OBDD ist nun **reduziert**: keine der beiden Regeln ist mehr anwendbar.

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

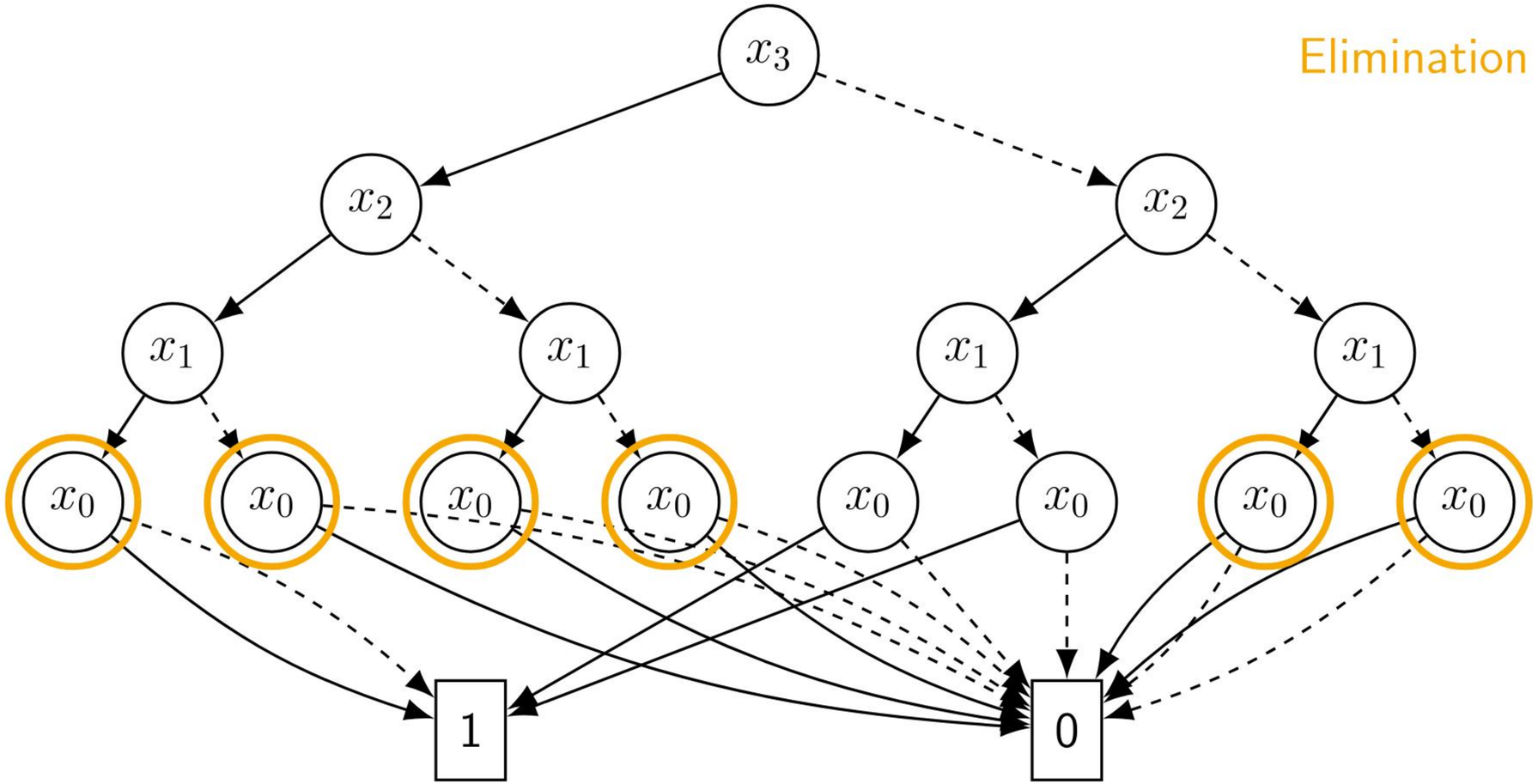
Beispiel für OBDD (Variablenordnung $x_3 < x_2 < x_1 < x_0$)

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$$



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

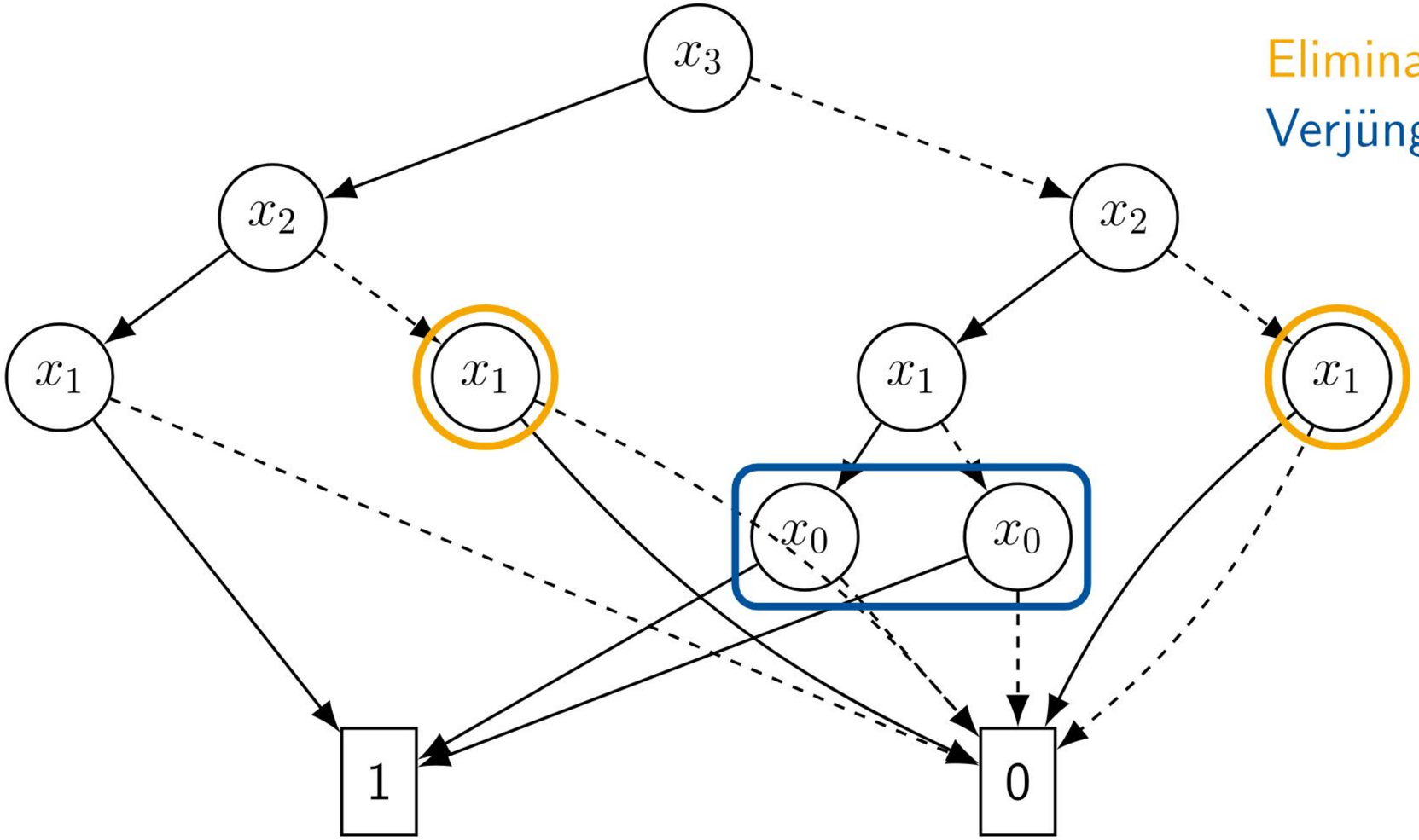
Beispiel für OBDD: Schritt 1



Elimination

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel für OBDD: Schritt 2

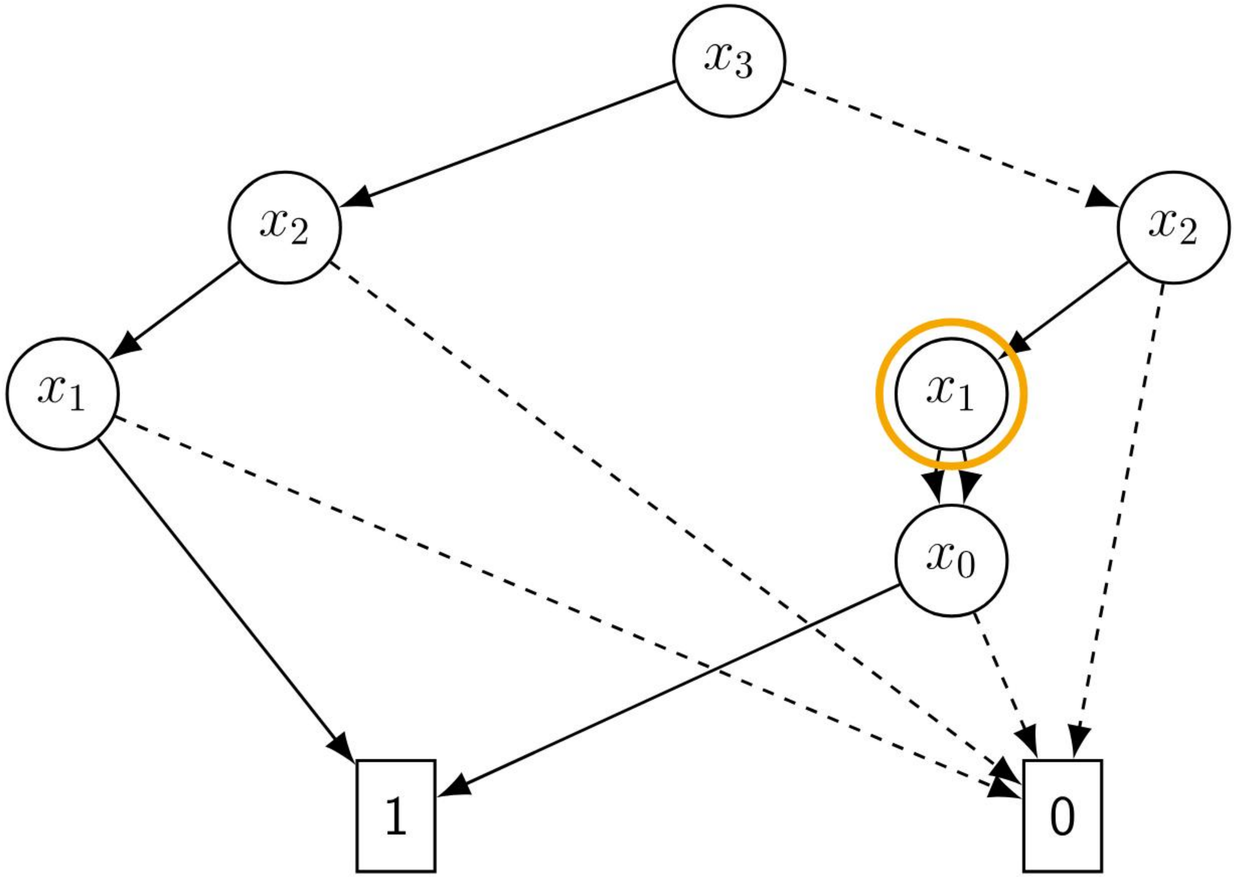


Elimination

Verjüngung

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

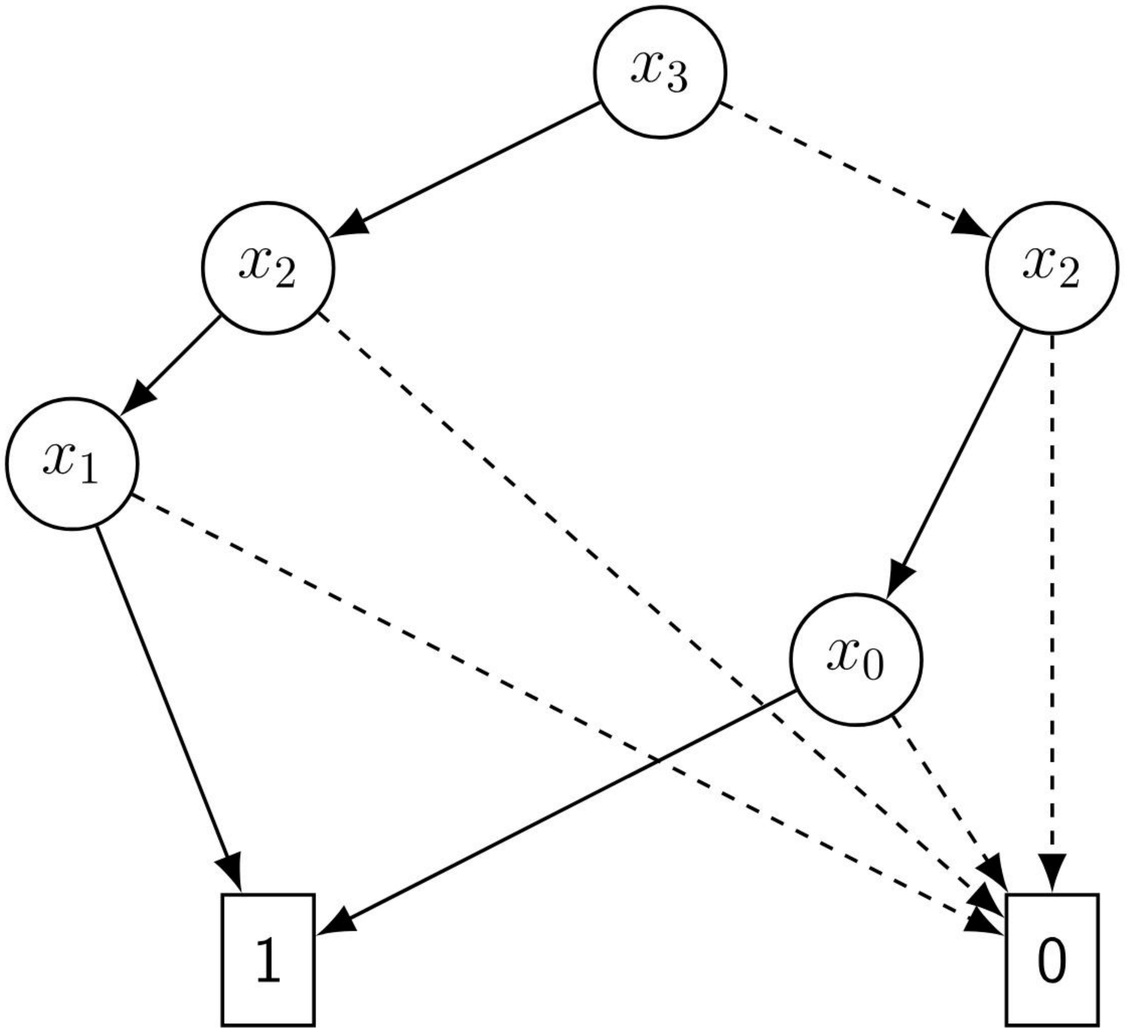
Beispiel für OBDD: Schritt 3



Elimination

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Reduziertes OBDD (Variablenordnung $x_3 < x_2 < x_1 < x_0$)



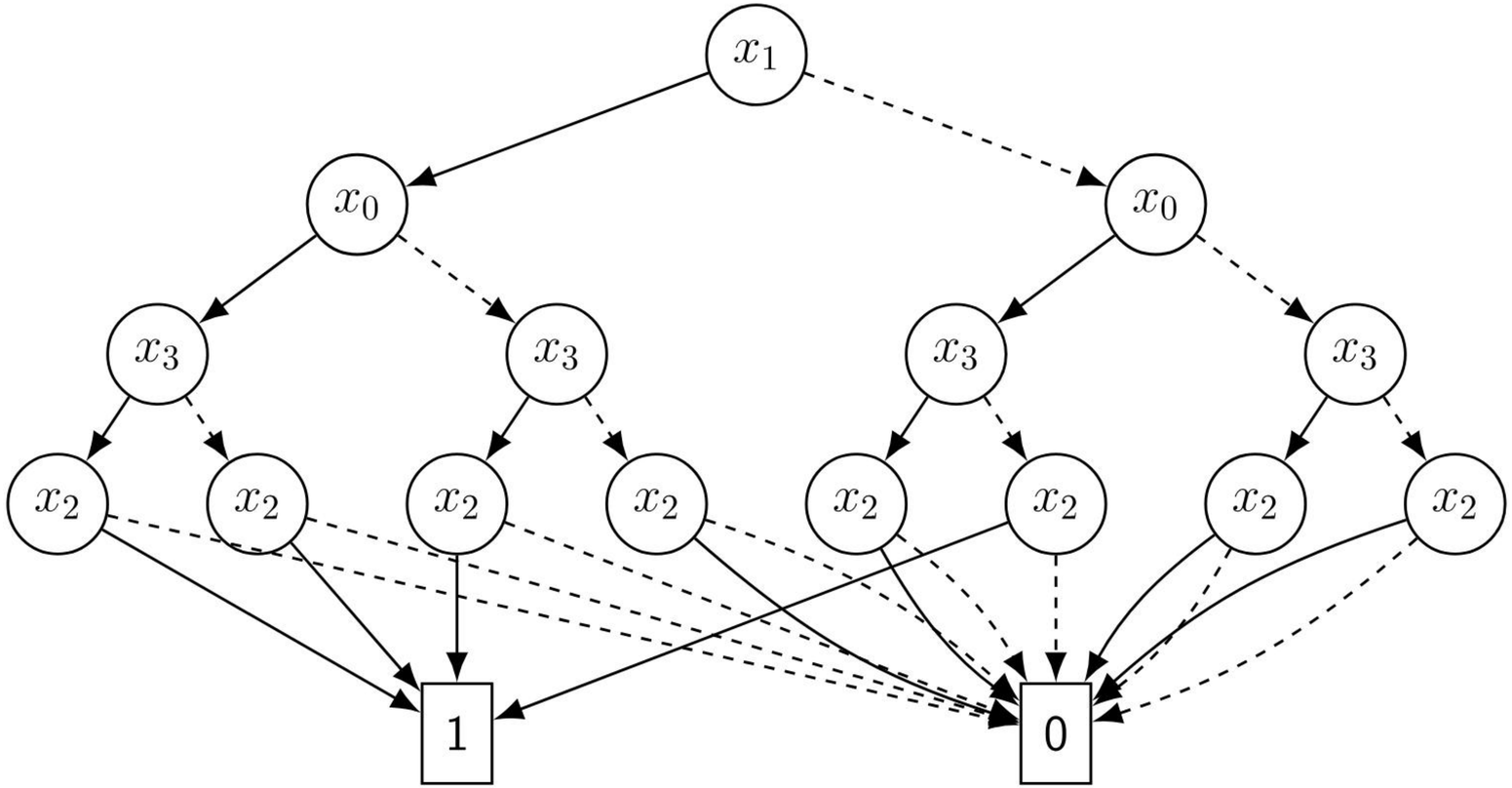
$\Rightarrow$ Nicht weiter reduzierbar!

$$f = x_3x_2x_1 \vee \overline{x_3}x_2x_0$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

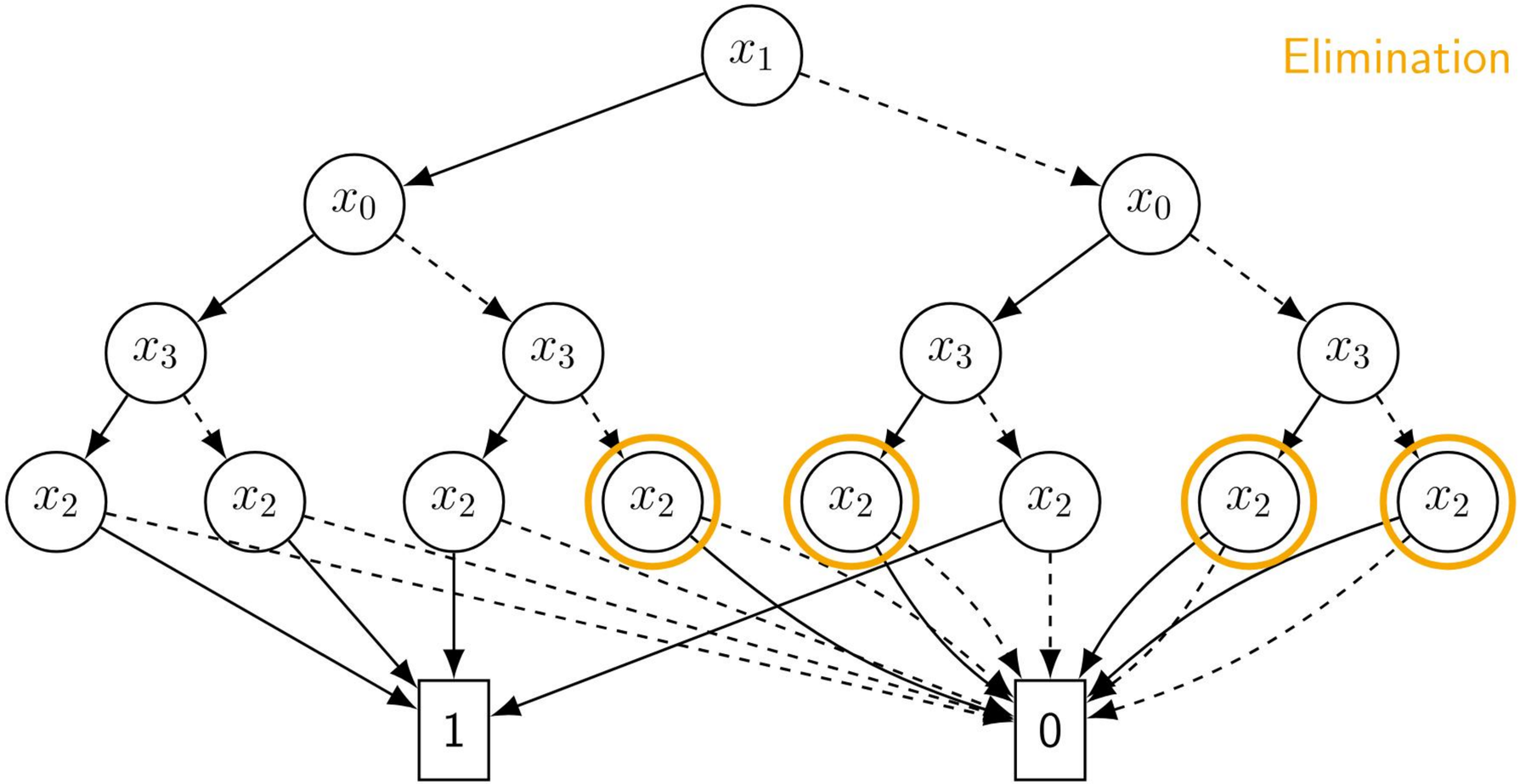
Beispiel für OBDD (Variablenordnung $x_1 < x_0 < x_3 < x_2$)

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$$



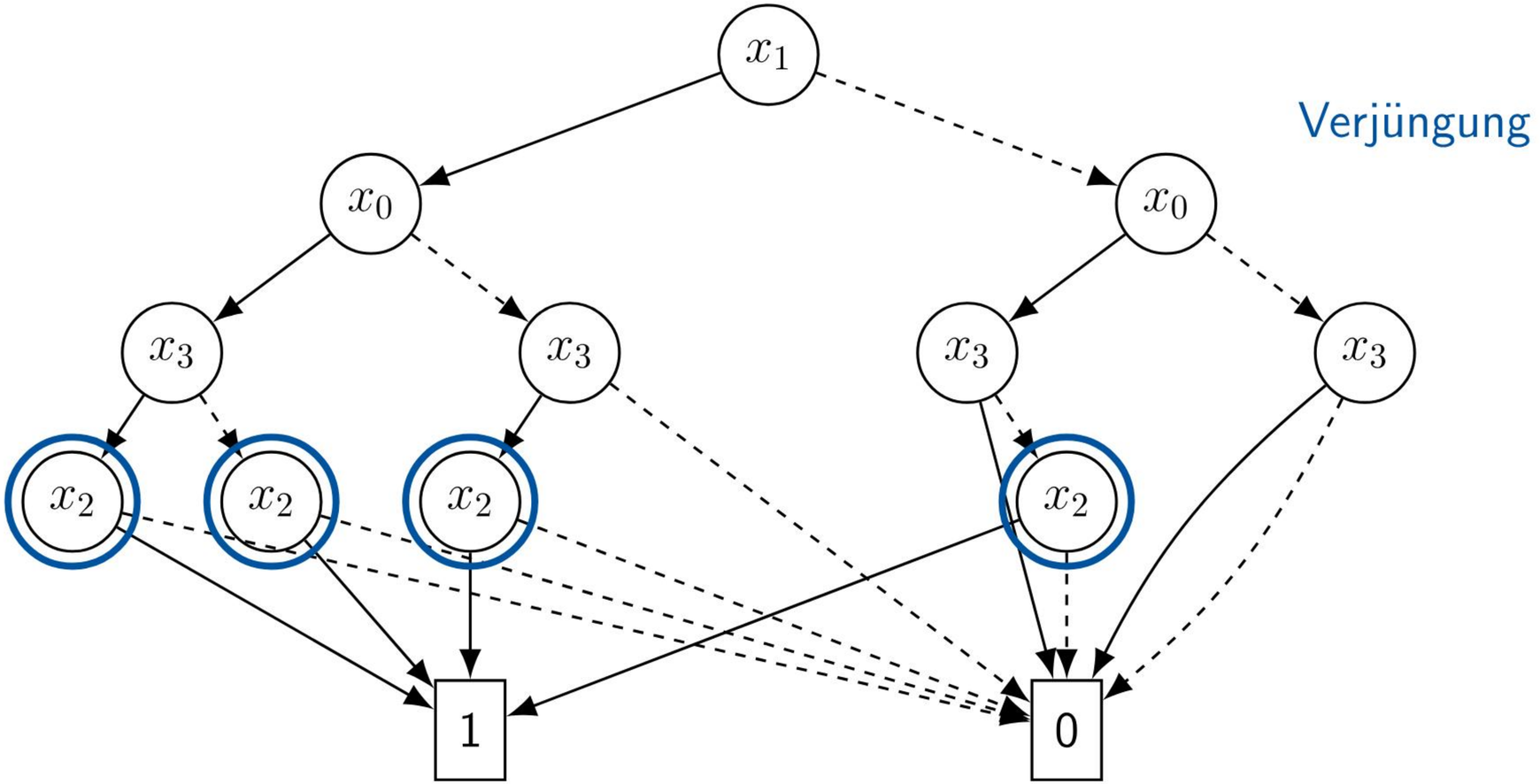
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel für OBDD: Schritt 1



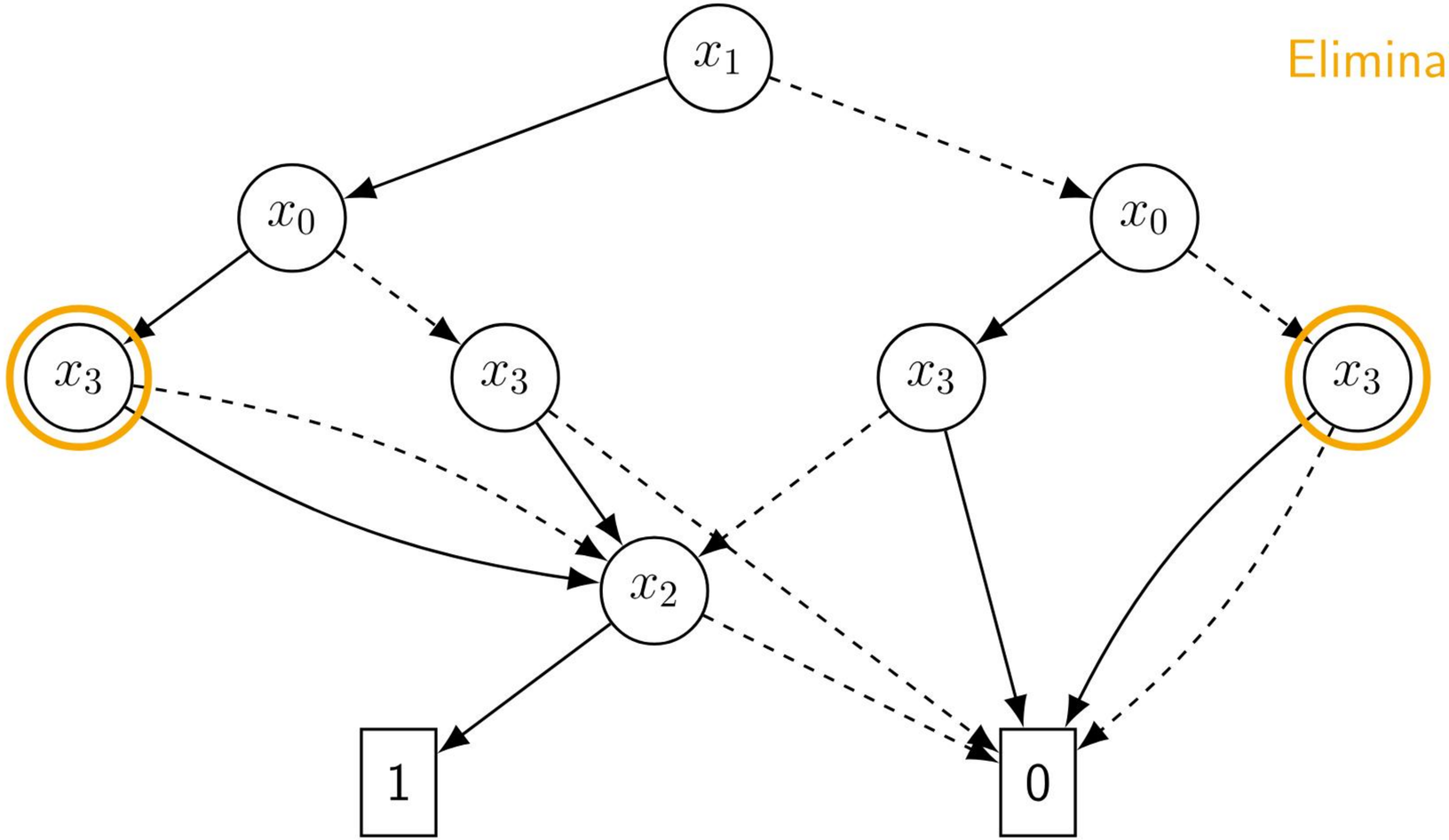
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel für OBDD: Schritt 2



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

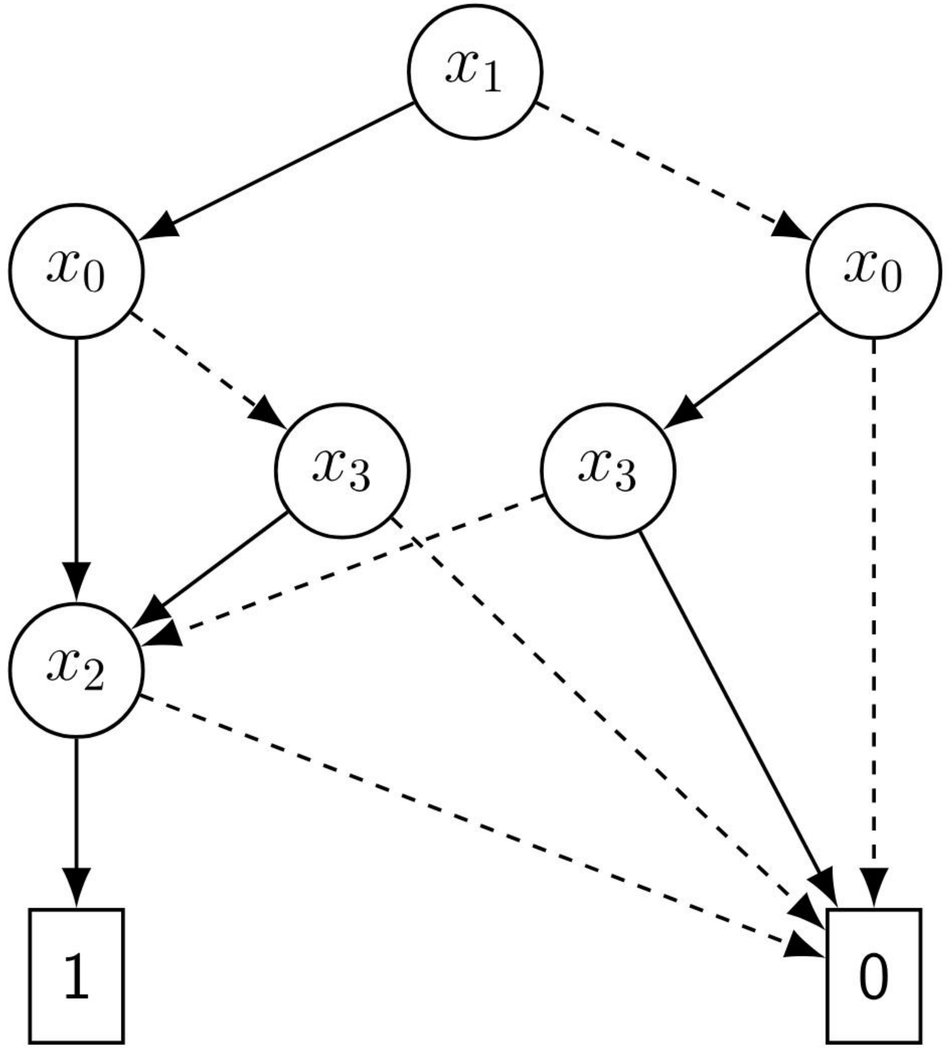
Beispiel für OBDD: Schritt 3



Elimination

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Reduziertes OBDD (Variablenordnung $x_1 < x_0 < x_3 < x_2$)



$\Rightarrow$ Nicht weiter reduzierbar!

$$f = x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Vergleich der Variablenordnung

Variablenordnung	Resultat
OBDD (Variablenordnung $x_3 < x_2 < x_1 < x_0$)	$f = x_3x_2x_1 \vee \overline{x_3}x_2x_0$
OBDD (Variablenordnung $x_1 < x_0 < x_3 < x_2$)	$f = x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$

- Reduziertes OBDD: 5 statt 6 innere Knoten

$\Rightarrow$ **Variablenordnung bei OBDDs relevant!**

Abschnitt 3.2

Karnaugh-Diagramme

- Implikanten
- Don’t Cares

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Wiederholung: Karnaugh-Diagramme für n = 2

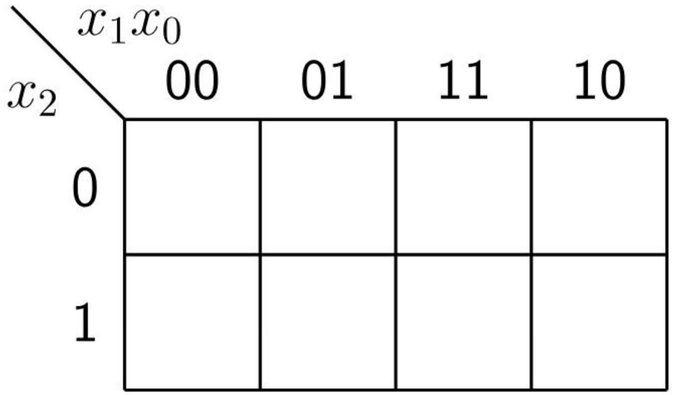
i	x_1	x_0	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	0

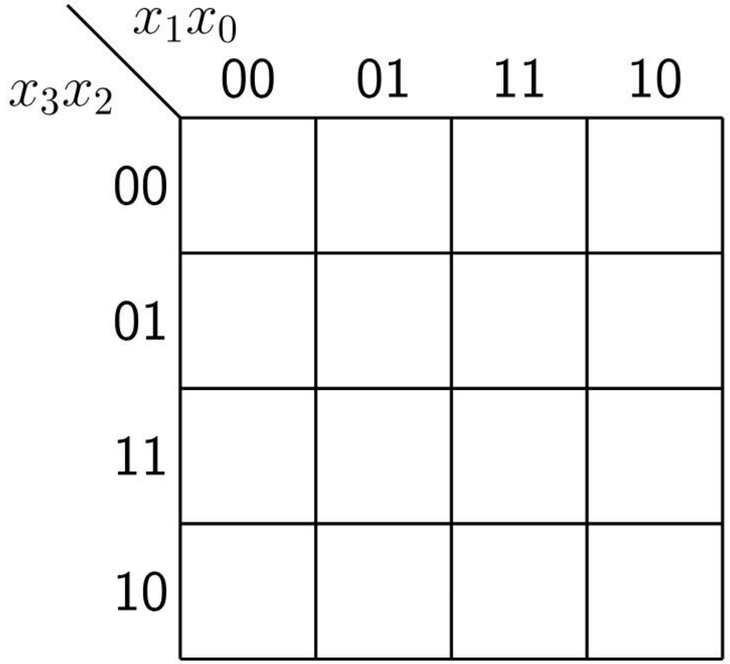


x_1 \ x_0	0	1
0	0	1
1	0	0

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Wiederholung: Karnaugh-Diagramme für n = 3, 4

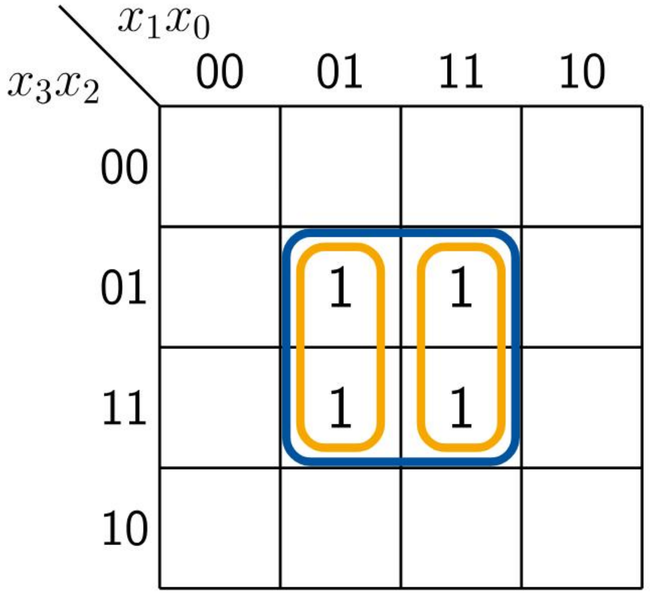




Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

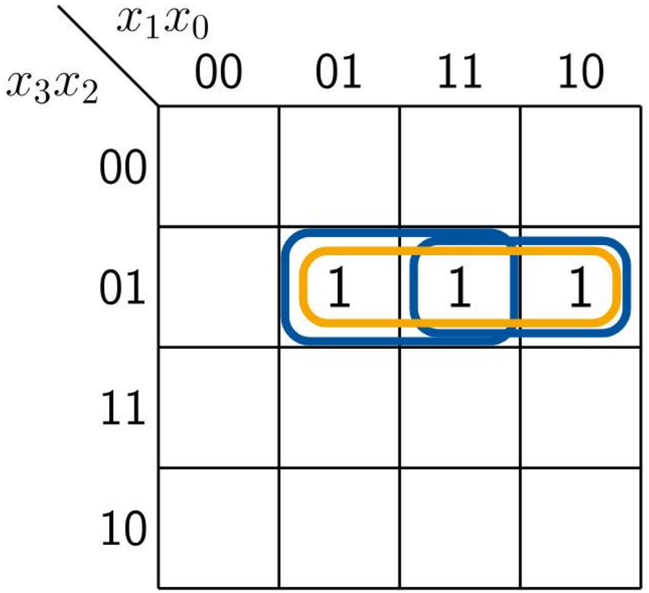
Blockbildung

- Blöcke müssen maximale Größe haben
- Die Blockgröße muss eine Zweierpotenz sein



korrekt

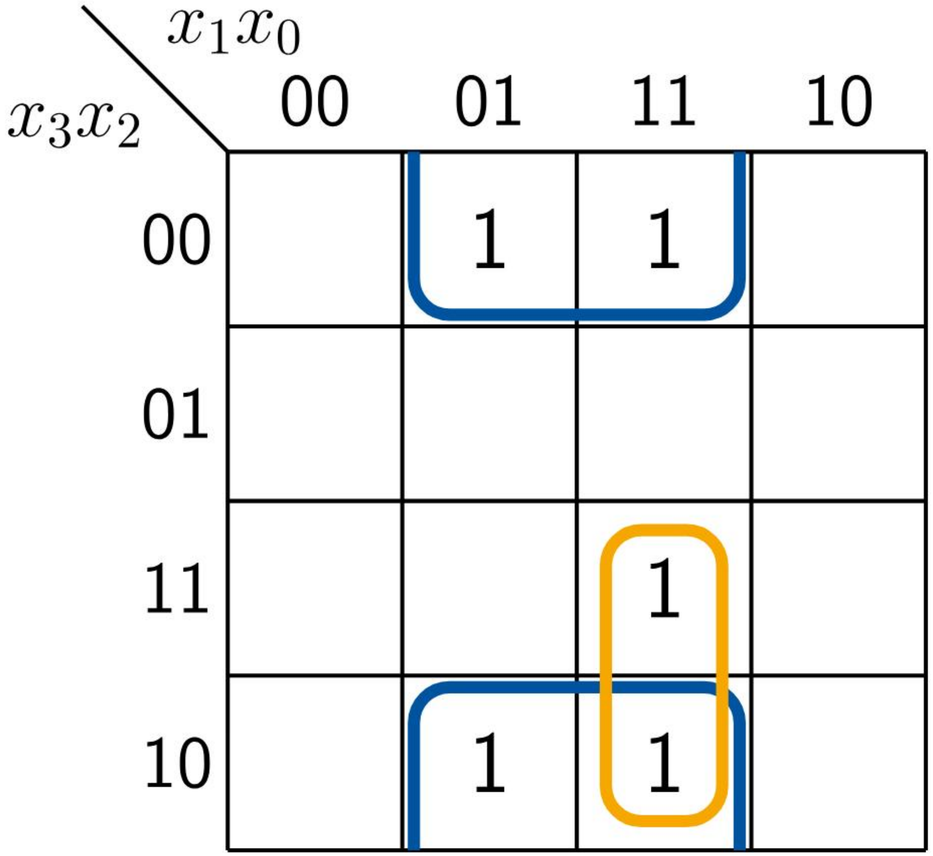
falsch



Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 \vee x_3x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1x_0$$



- Blau: $\overline{x_2}x_0$ (Block über den Rand)
- Orange: $x_3x_1x_0$

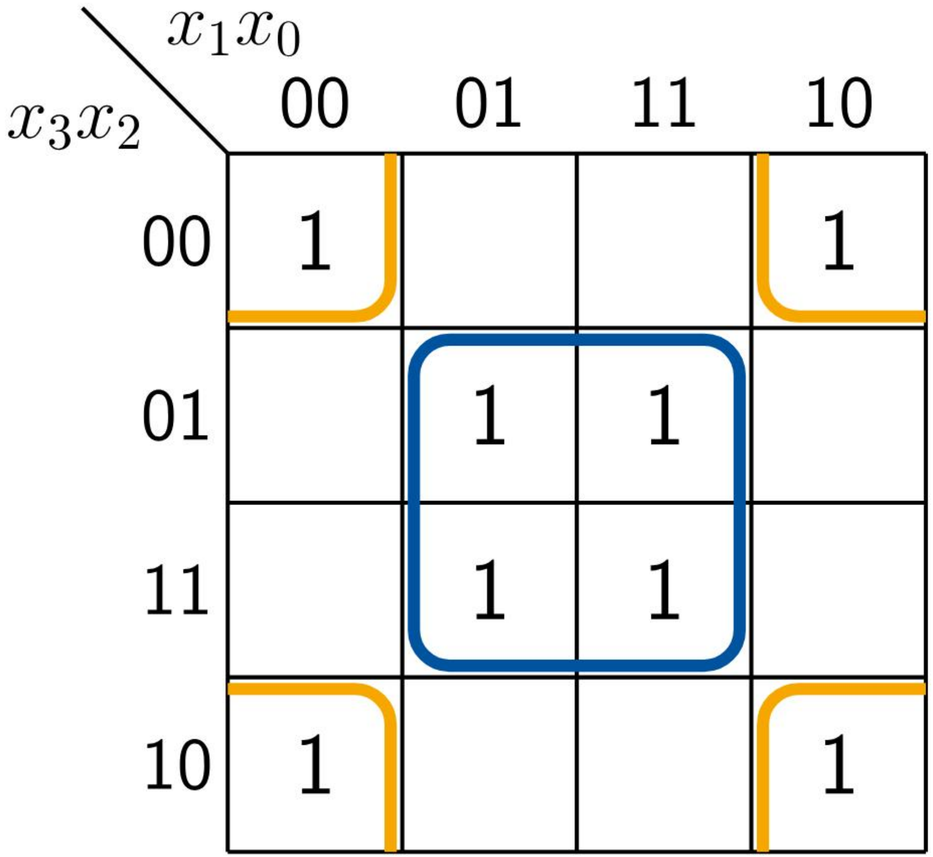
Vereinfachte Form:

$$f = \overline{x_2}x_0 \vee x_3x_1x_0$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_3x_2\overline{x_1}x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1\overline{x_0} \vee x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0}$$



- Blau: x_2x_0
- Orange: $\overline{x_2}\,\overline{x_0}$ (die vier Ecken bilden einen Block)

Vereinfachte Form:

$$f = x_2x_0 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_0}$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition

Sei $f : B^n \to B$ eine Boolesche Funktion. Ein Term $M \neq 0$ heißt **Implikant** von f, kurz $M \leq f$, falls $M(x) \leq f(x)$ für alle $x \in B^n$ gilt, d.h.

$$M(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \qquad \forall x \in B^n$$

Ein Implikant M von f heißt **Primimplikant** (von f), falls keine echte Verkürzung von M noch Implikant von f ist.
Ein Primimplikant M heißt **Kernimplikant** (von f), falls M in *jedem* Minimalpolynom von f vorkommt.

Beispiel 2

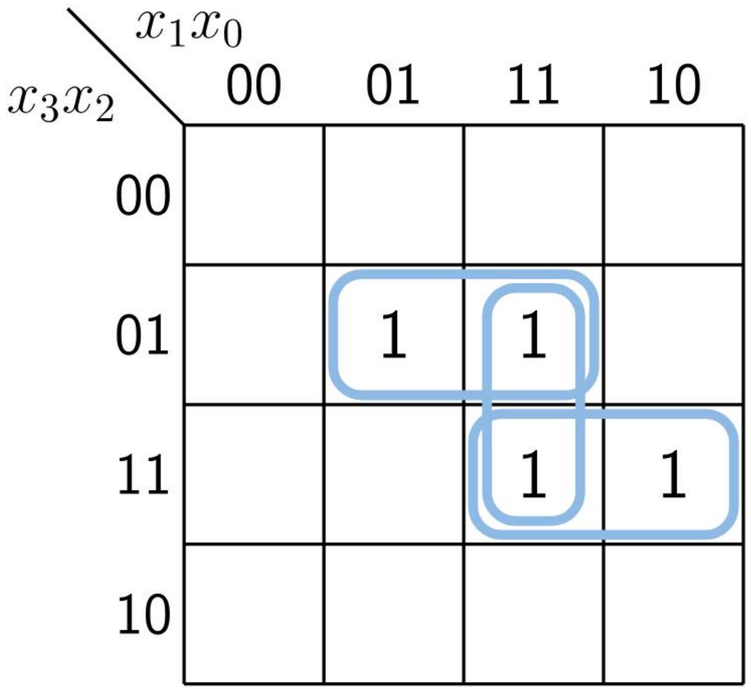
$$f = x_3x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11			1	1
10				

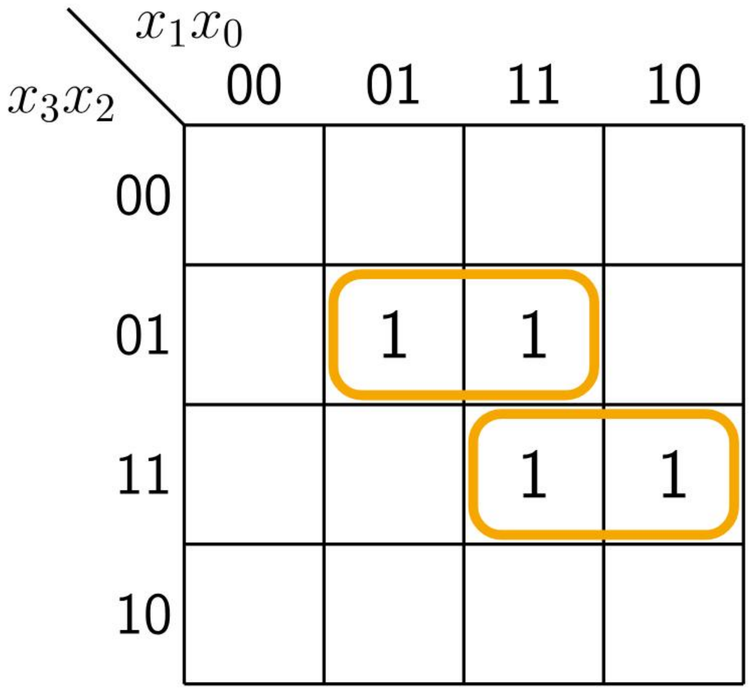
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 2

$$f = x_3x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$$



Primimplikanten



Kernimplikanten

- Primimplikanten: $\overline{x_3}x_2x_0,\ x_2x_1x_0,\ x_3x_2x_1$
- Kernimplikanten: $\overline{x_3}x_2x_0,\ x_3x_2x_1 \Rightarrow$ Minimalpolynom $f = x_3x_2x_1 \vee \overline{x_3}x_2x_0$

KV-Kochrezept

0. Wertetabelle
1. Einsen ins KV-Diagramm
2. Alle Primimplikanten: maximale Blöcke
3. Minimale Überdeckung $\Rightarrow$ Minimalpolynom

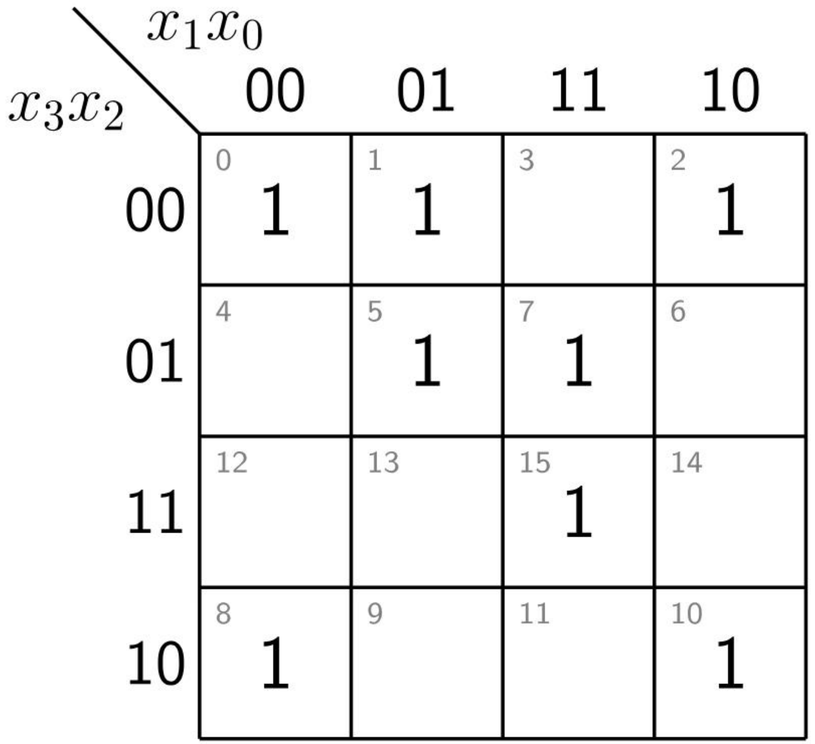
Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

KV-Kochrezept: 0. Wertetabelle

i	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1

i	x_3	x_2	x_1	x_0	f
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

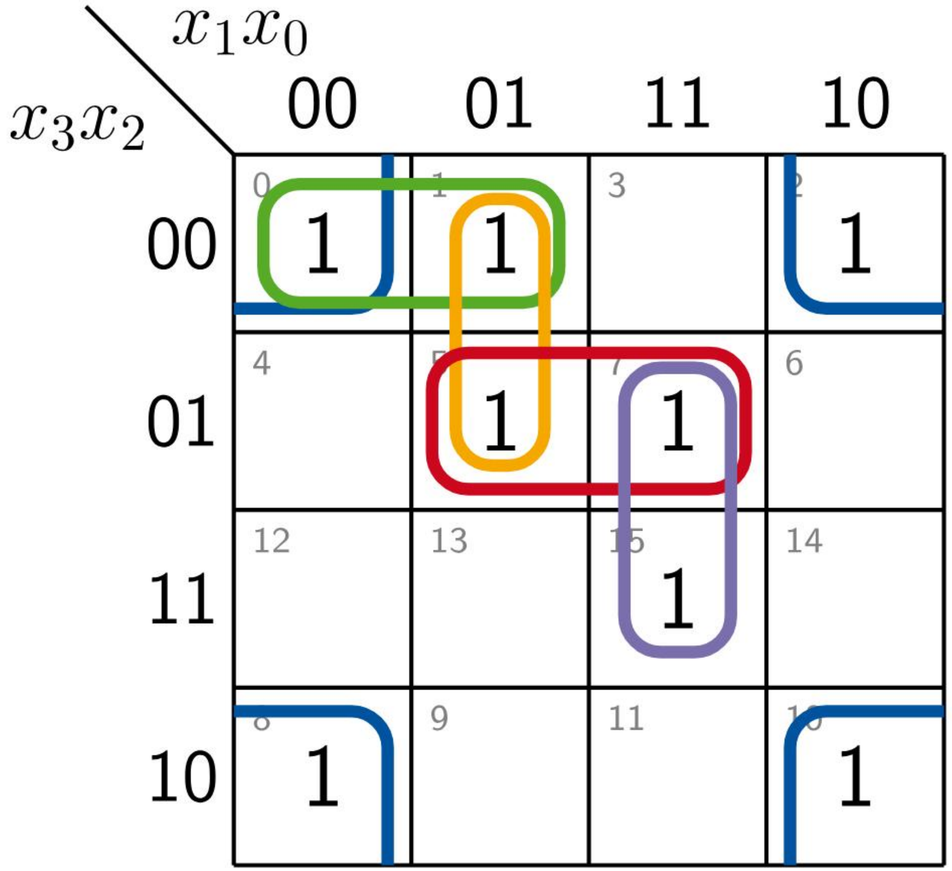
KV-Kochrezept: 1. Einsen eintragen



- Nullen weglassen

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

KV-Kochrezept: 2. Alle Primimplikanten



$\overline{x_2}\,\overline{x_0}$

$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$\overline{x_3}\,\overline{x_1}x_0$

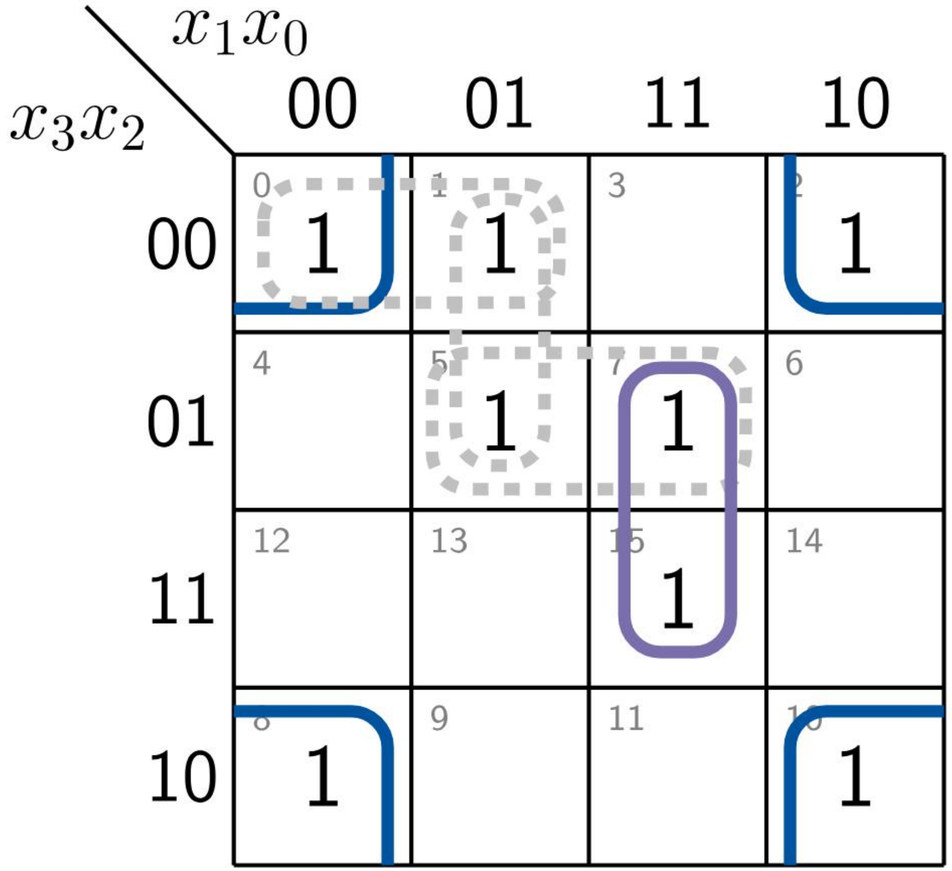
$\overline{x_3}x_2x_0$

$x_2x_1x_0$

- Blöcke maximal, Größe 2^k, auch über den Rand

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

KV-Kochrezept: 3. Minimale Überdeckung



$\overline{x_2}\,\overline{x_0}$

$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$\overline{x_3}\,\overline{x_1}x_0$

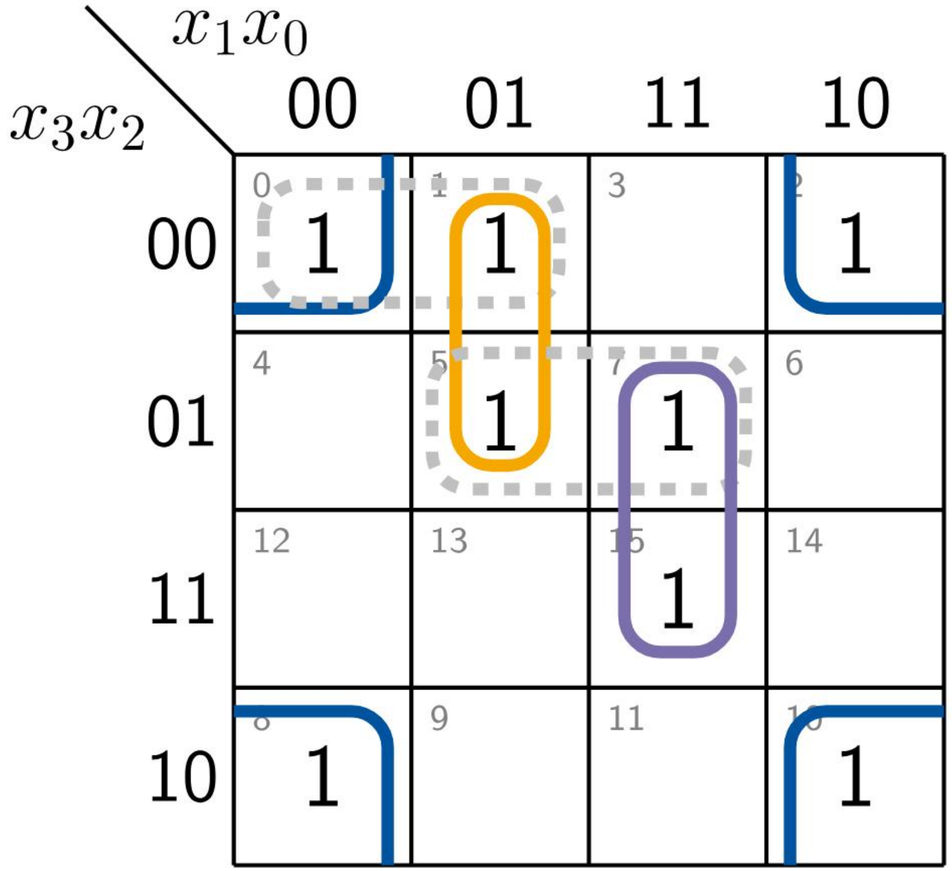
$\overline{x_3}x_2x_0$

$x_2x_1x_0$

- Einsen mit nur einem Block $\Rightarrow$ **Kernimplikant**

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

KV-Kochrezept: 3. Minimale Überdeckung



$\overline{x_2}\,\overline{x_0}$

$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$\overline{x_3}\,\overline{x_1}x_0$

$\overline{x_3}x_2x_0$

$x_2x_1x_0$

- Restliche Einsen mit möglichst wenigen Blöcken

$$f = \overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_1}x_0$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Ausnutzung von Don’t Cares

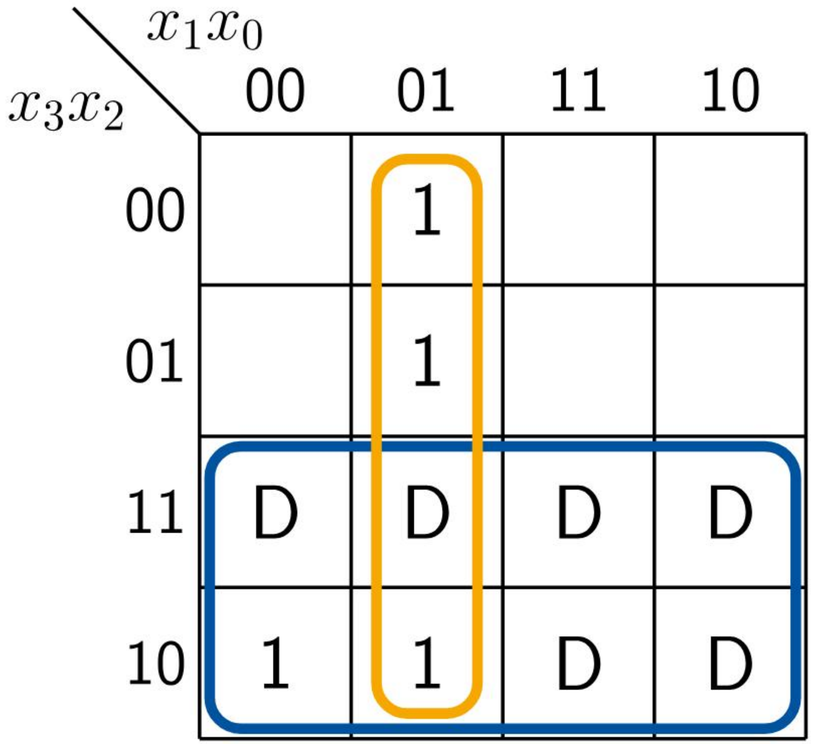
x	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
A	1	0	1	0	D
B	1	0	1	1	D
C	1	1	0	0	D
D	1	1	0	1	D
E	1	1	1	0	D
F	1	1	1	1	D

- Eingaben A–F kommen nicht vor (z.B. BCD-Code)
- **D** (Don’t Care): Funktionswert beliebig, kann zu 0 oder 1 gewählt werden

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11	D	D	D	D
10	1	1	D	D

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Ausnutzung von Don’t Cares



- Don’t Cares werden als 1 behandelt, wo sie größere Blöcke ermöglichen
- Blau: x_3, Orange: $\overline{x_1}x_0$

Ergebnis: $f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3 \vee \overline{x_1}x_0$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

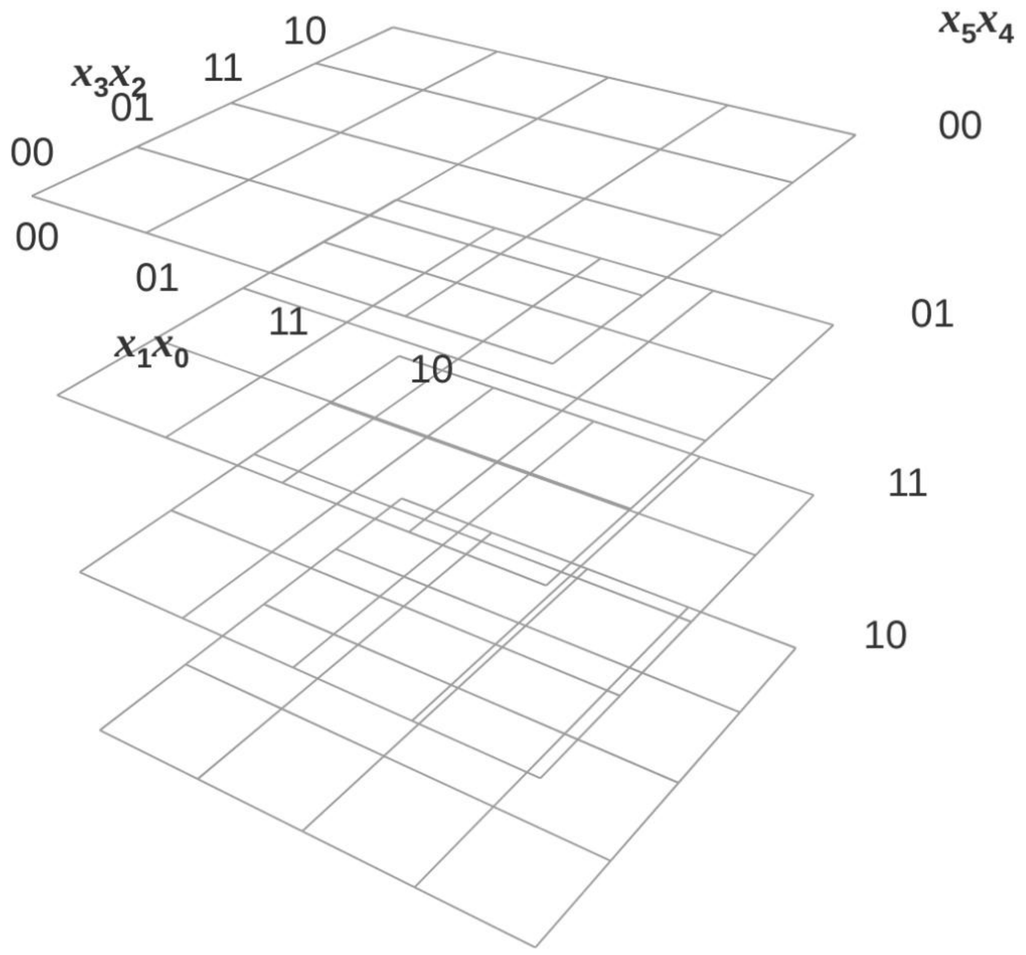
Abschnitt 3.3

Quine-McCluskey-Verfahren

- Bestimmung der Primimplikanten
- Implikationsmatrix
- Mehrdeutigkeit von Minimalpolynomen

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Motivation: KV-Diagramm für 6 Variablen



Primimplikanten

- ☐ x_2x_0
- ☐ $\overline{x_5}\overline{x_3}\overline{x_1}$
- ☐ $x_5\overline{x_4}\overline{x_2}\overline{x_0}$
- ☐ $\overline{x_4}\overline{x_3}\overline{x_2}\overline{x_1}\overline{x_0}$

alle | Minimalpolynom | keine

Ansicht

- ☐ Drehen
- ☐ Einsen

Ansicht zurücksetzen

Quine-McCluskey-Verfahren: Vorgehen

1. Minterme der einschlägigen Indizes nach **Anzahl der Negationen** gruppieren
2. **Resolutionsregel** $ab \vee a\bar{b} = a$ auf Terme benachbarter Gruppen anwenden, solange möglich
3. Terme, die sich nicht weiter verkürzen lassen, sind die **Primimplikanten**
4. **Implikationsmatrix** aufstellen: Welcher Primimplikant deckt welchen Minterm ab?
5. **Kernimplikanten** wählen, restliche Minterme mit möglichst kurzen Primimplikanten abdecken

Quine-McCluskey-Verfahren

$$f = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0} \vee x_3\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee x_3x_2\overline{x_1}x_0 \vee x_3x_2x_1\overline{x_0}$$

Minterme gemäß Anzahl der Negationen:

Gruppe	Implikant	Index (dezimal)
1	$x_3\overline{x_2}x_1x_0$	11
	$x_3x_2\overline{x_1}x_0$	13
	$x_3x_2x_1\overline{x_0}$	14
2	$\overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0}$	6
	$x_3x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	12
3	$\overline{x_3}x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	4
4	$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0

Quine-McCluskey-Verfahren

Nach erster Anwendung der Resolutionsregel:

Gruppe	Implikant	Index (dezimal)
1	$x_3\overline{x_2}x_1x_0$	11
	$x_2x_1\overline{x_0}$	6,14
	$x_3x_2\overline{x_1}$	12,13
	$x_3x_2\overline{x_0}$	12,14
2	$\overline{x_3}x_2\overline{x_0}$	4,6
	$x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	4,12
3	$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0,4

Alle Primimplikanten:

Gruppe	Implikant	Index (dezimal)
1	$x_3\overline{x_2}x_1x_0$	11
	$x_3x_2\overline{x_1}$	12,13
	$x_2\overline{x_0}$	4,6,12,14
3	$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0,4

Quine-McCluskey-Verfahren

Implikationsmatrix:

Primimplikant \ Minterm	0	4	6	11	12	13	14
$x_3\overline{x_2}x_1x_0$	0	0	0	1	0	0	0
$x_3x_2\overline{x_1}$	0	0	0	0	1	1	0
$x_2\overline{x_0}$	0	1	1	0	1	0	1
$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	1	1	0	0	0	0	0

Kostengünstigste Darstellung:

$$f = x_3\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3x_2\overline{x_1} \vee x_2\overline{x_0} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

Anderes Beispiel:

$$f = x_3\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0} \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0}$$
$$\vee\ \overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0 \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1x_0 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

Minterme gemäß Anzahl der Negationen:

Gruppe	Implikant	Index (dezimal)
1	$\overline{x_3}x_2x_1x_0$	7
	$x_3\overline{x_2}x_1x_0$	11
2	$\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1x_0$	3
	$\overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0$	5
	$\overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0}$	6
	$x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0}$	10
3	$\overline{x_3}x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	4
	$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	8
4	$\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

Nach erster Anwendung der Resolutionsregel:

Gruppe	Implikant	Index (dezimal)
1	$\overline{x_3}x_1x_0$	3,7
	$\overline{x_3}x_2x_0$	5,7
	$\overline{x_3}x_2x_1$	6,7
	$\overline{x_2}x_1x_0$	3,11
	$x_3\overline{x_2}x_1$	10,11
2	$\overline{x_3}x_2\overline{x_1}$	4,5
	$\overline{x_3}x_2\overline{x_0}$	4,6
	$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0}$	8,10
3	$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0,4
	$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0,8

Nach zweiter Anwendung der Resolutionsregel:

Gruppe	Implikant	Index (dezimal)
1	$\overline{x_3}x_1x_0$	3,7
	$\overline{x_3}x_2$	4,5,6,7
	$\overline{x_2}x_1x_0$	3,11
	$x_3\overline{x_2}x_1$	10,11
2	$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0}$	8,10
3	$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0,4
	$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0,8

Keine weitere Anwendung mehr möglich

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

Implikationsmatrix:

Primimplikant \ Minterm	0	3	4	5	6	7	8	10	11
$\overline{x_3}x_1x_0$	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$\overline{x_3}x_2$	0	0	1	1	1	1	0	0	0
$\overline{x_2}x_1x_0$	0	1	0	0	0	0	0	0	1
$x_3\overline{x_2}x_1$	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0}$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	1	0	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Kernimplikant: $\overline{x_3}x_2$ (einziger Primimplikant für die Minterme 5 und 6)

Kostengünstigste Darstellung: Hier nicht eindeutig!

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

Mögliche Minimalpolynome (jeweils mit Kernimplikant $\overline{x_3}x_2$):

$$f_1 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$
$$f_2 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$
$$f_3 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_3}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$
$$f_4 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

- Alle vier Polynome haben die Länge 11.

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

Kernimplikant $\overline{x_3}x_2$ gewählt $\Rightarrow$ Minterme 4, 5, 6, 7 sind abgedeckt.

Primimplikant \ Minterm	**0**	**3**	**8**	**10**	**11**
$\overline{x_3}x_1x_0$	0	1	0	0	0
$\boldsymbol{\overline{x_2}x_1x_0}$	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
$x_3\overline{x_2}x_1$	0	0	0	1	1
$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0}$	0	0	1	1	0
$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	1	0	0	0	0
$\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	1	0	1	0	0

Wähle beliebigen Implikanten mit neuer Information!

$$f_1 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

Minterme 3 und 11 sind nun ebenfalls abgedeckt.

Primimplikant \ Minterm	0	8	10
$\overline{x_3} x_1 x_0$	0	0	0
$x_3 \overline{x_2} x_1$	0	0	1
$x_3 \overline{x_2}\,\overline{x_0}$	0	1	1
$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	1	0	0
$\boldsymbol{\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}}$	**1**	**1**	**0**

Wähle beliebigen Implikanten mit neuer Information!

$$f_1 = \overline{x_3} x_2 \vee \overline{x_2} x_1 x_0 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel zum Quine-McCluskey-Verfahren

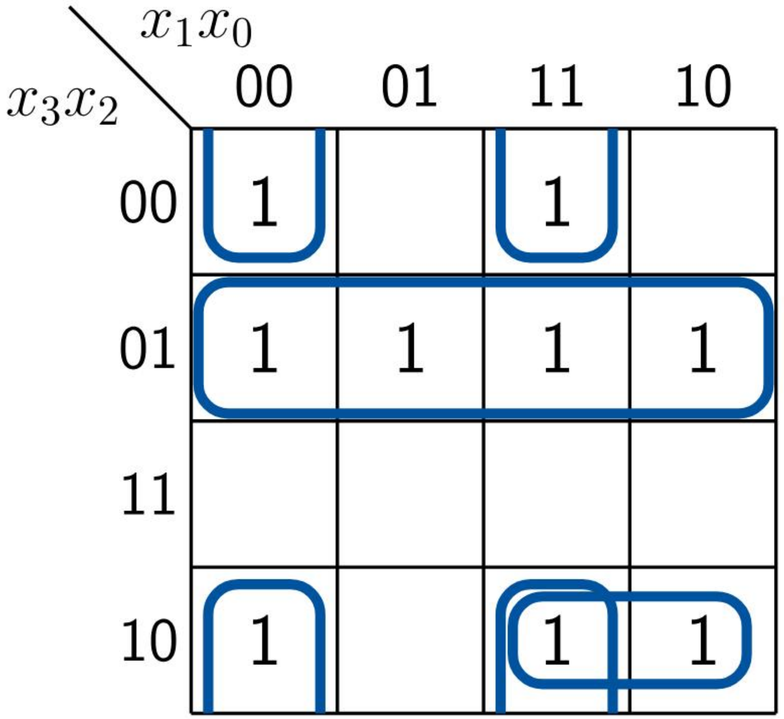
Nur noch Minterm 10 ist offen.

Primimplikant \ Minterm	10
$x_3\overline{x_2}x_1$	1
$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0}$	1
$\overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$	0

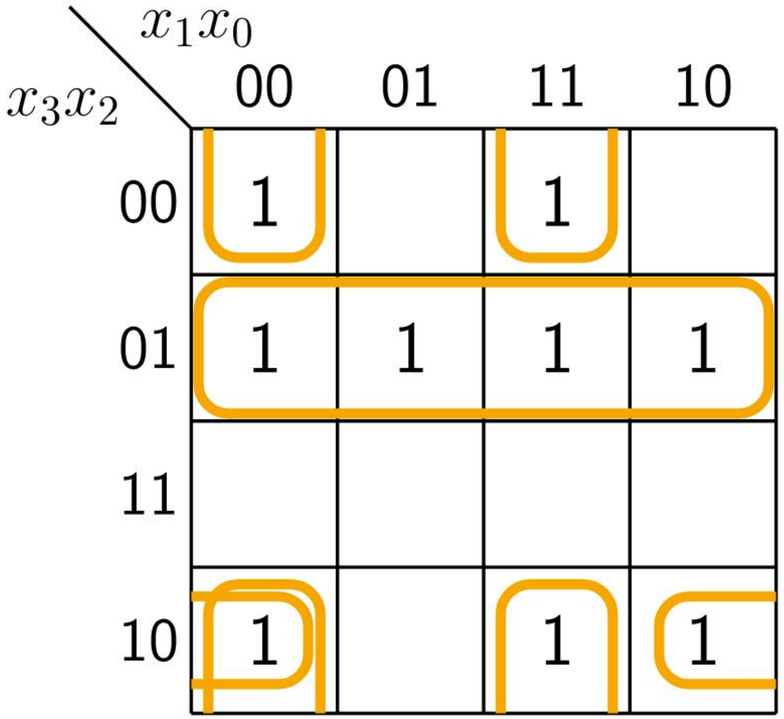
Wähle beliebigen Implikanten mit neuer Information!

$$f_1 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} \vee x_3\overline{x_2}x_1$$

Mehrdeutigkeit am KV-Diagramm



f_1

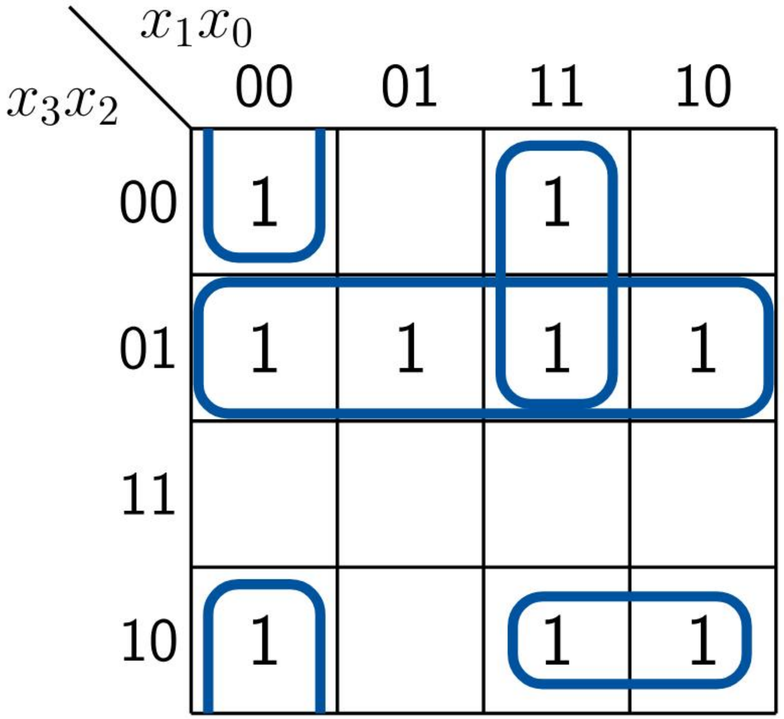


f_2

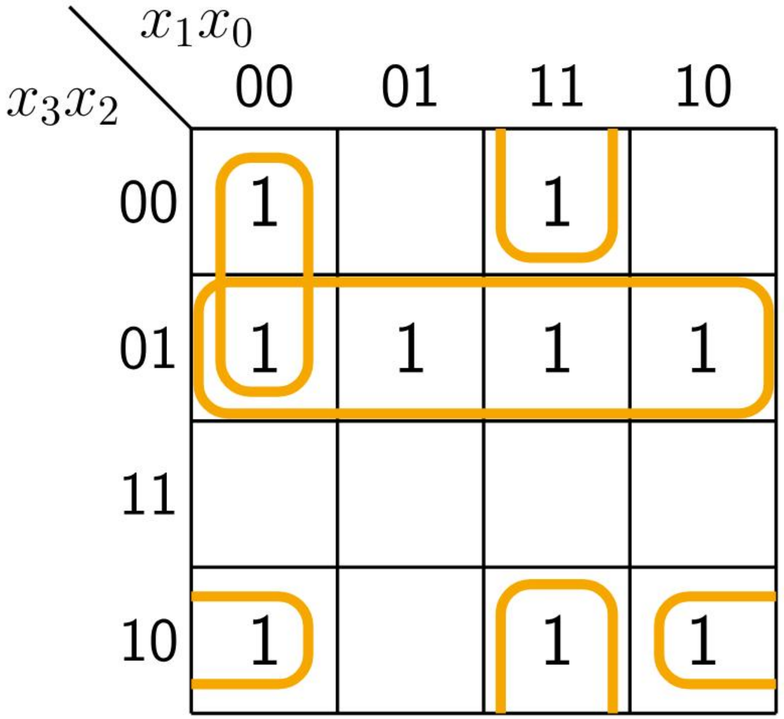
$$f_1 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$
$$f_2 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Mehrdeutigkeit am KV-Diagramm



f_3



f_4

$$f_3 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_3}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$
$$f_4 = \overline{x_3}x_2 \vee \overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$$

Chair of Cyber-Physical Systems
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Zusammenfassung

- **Warum minimieren?**
  - Reduzierung von Eingangsvariablen und Schaltkreiselementen
  - Suche nach der optimalen Realisierung
- **In diesem Kapitel vorgestellt:**

Definitionen

- Minimalpolynom
- (Prim- / Kern-) Implikant

Verfahren

- (Reduzierte) OBDDs
- Karnaugh-Veitch
- Quine-McCluskey